Analysis II

Christoph Kawan

6. Februar 2019

Inhaltsverzeichnis

1 Ein bißchen Topologie

In diesem Abschnitt führen wir das Konzept eines metrischen Raums ein und lernen viele wichtige Begriffe kennen, die damit zu tun haben. Inbesondere werden wir den Begriff einer konvergenten Folge und den einer stetigen Funktion weitreichend verallgemeinern.

1.1 Metrische Räume

Viele Resultate der Analysis benötigen keine Rechenoperationen sondern lediglich einen Abstandsbegriff. Das Konzept eines metrischen Raums abstrahiert den Begriff des Abstands von Punkten, den wir von Euklidischen Räumen her kennen.

1.1 Definition: *Sei X eine Menge und $d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine Funktion. Das geordnete Paar (X, d) heißt* **metrischer Raum**, *falls folgende Axiome für alle $x, y, z \in X$ erfüllt sind:*

(M1) Positiv-Definitheit: $d(x, y) = 0$ gilt genau dann, wenn $x = y$.

(M2) Symmetrie: $d(x, y) = d(y, x)$.

(M3) Dreiecksungleichung: $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Die Funktion d nennen wir auch **Metrik** *oder* **Abstandsfunktion** *und die Elemente von X nennen wir* **Punkte**. *Ferner nennen wir $d(x, y)$ den* **Abstand** *von x und y.*

1.2 Beispiel: Mit $d(x, y) := |x - y|$ ist $(\mathbb{K}, d)$ ein metrischer Raum für $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. In der Tat, der Absolutbetrag liefert stets nichtnegative Werte. Zudem gilt $|x - y| = 0$ genau dann, wenn $x - y = 0$, also $x = y$ (Positiv-Definitheit). Ferner ist natürlich $|x - y| = | - (y - x)| = |y - x|$ (Symmetrie). Schließlich gilt (nach Bemerkung 3.13 in Analysis I)

$$|x - y| = |x - z + z - y| = |(x - z) + (z - y)| \leq |x - z| + |z - y|,$$

also gilt auch die Dreiecksungleichung.

Das nächste Beispiel verallgemeinert das obige.

1.3 Beispiel: Erinnerung: Sei $(X, +, \cdot)$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Funktion $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $x \mapsto \|x\|$, heißt *Norm* auf X, falls sie folgende Axiome erfüllt:

(N1) $\|x\| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$.

(N2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ für alle $\alpha \in \mathbb{K}$ und $x \in X$.

(N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ für alle $x, y \in X$.

Mit $d(x, y) := \|x - y\|$ ist (X, d) ein metrischer Raum. Die Positiv-Definitheit folgt sofort aus (N1). Die Symmetrie folgt aus (N2), denn $\|x - y\| = \|(-1)(y - x)\| = |-1| \|y - x\| = \|y - x\|$. Die Dreiecksungleichung schließlich folgt aus (N3).

Konkretes Beispiel: Sei $X = \mathbb{R}^n$ mit den üblichen Rechenoperationen. Beispiele für Normen auf X sind

$$\begin{aligned} \|x\|_2 &= \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \quad \text{(Euklidische Norm, } L^2\text{-Norm)} \\ \|x\|_1 &= \sum_{i=1}^n |x_i| \quad \text{(Summennorm, } L^1\text{-Norm)} \\ \|x\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \quad \text{(Maximumsnorm, } L^\infty\text{-Norm)} \end{aligned}$$

◊

1.4 Beispiel: Sei X eine beliebige Menge. Mit

$$d(x, y) := \begin{cases} 0 & \text{für } x = y \\ 1 & \text{für } x \neq y \end{cases}$$

ist (X, d) ein metrischer Raum (wenn auch ein trivialer und meistens recht nutzloser). Die Positiv-Definitheit und die Symmetrie sind unmittelbar aus der Definition ersichtlich. Die Dreiecksungleichung $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ ist leicht einzusehen. Falls $x = y$, ist $d(x, y) = 0$, dann gilt sie trivialerweise. Ist $x \neq y$ (also $d(x, y) = 1$), so muss $x \neq z$ oder $z \neq y$ (also $d(x, z) + d(z, y) \geq 1$) gelten, da sonst $x = y$. ◊

Eines der wichtigsten Konzepte im Zusammenhang mit metrischen Räumen ist das einer offenen (bzw. abgeschlossenen) Menge.

1.5 Definition: *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Für $x \in X$ und $r > 0$ heißt*

$$B(x, r) := \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$$

der **offene Ball** *mit* **Mittelpunkt** *x und* **Radius** *r. Sei $A \subset X$ eine Teilmenge. Dann heißt A*

- **offen (in X)**, *falls zu jedem* $x \in A$ *ein* $r > 0$ *existiert, so dass* $B(x, r) \subset A$.
- **abgeschlossen (in X)**, *falls* $X \backslash A$ *offen ist.*

Sei $x \in X$. *Eine Menge* $U \subset X$ *heißt* **Umgebung** *von* x, *falls es eine offene Menge* $A \subset X$ *mit* $x \in A \subset U$ *gibt. Falls* U *selbst offen ist, nennen wir* U *eine* **offene Umgebung** *von* x.

1.6 Beispiel: Die offenen Bälle $B(x, r)$ sind offene Mengen. Ist nämlich $y \in B(x, r)$ und $s := r - d(y, x)$, so ist $s > 0$ und es gilt $B(y, s) \subset B(x, r)$. Denn für alle $z \in B(y, s)$ gilt nach der Dreiecksungleichung

$$d(z, x) \leq d(z, y) + d(y, x) < s + d(y, x) = r - d(y, x) + d(y, x) = r.$$

$\Diamond$

1.7 Beispiel: In $(\mathbb{R}, d)$ mit $d(x, y) = |x - y|$ gilt Folgendes:

- Beliebige Vereinigungen offener Intervalle $]a_i, b_i[$ mit $-\infty \leq a_i < b_i \leq \infty$ sind offen. Man sieht leicht, dass mit jedem Punkt einer solchen Menge auch ein offener Ball um diesen Punkt in der Menge enthalten ist.
- Endliche Vereinigungen abgeschlossener Intervalle $[a_i, b_i]$ mit $-\infty < a_i \leq b_i < \infty$ oder $(-\infty, a]$, $[b, \infty)$ sind abgeschlossen.
- Intervalle der Form $[a, b[$ mit $a < b$ sind weder offen noch abgeschlossen, denn zum Punkt a gibt es keinen Ball $B(a, r) =]a - r, a + r[$, der ganz in $[a, b[$ enthalten ist und zum Punkt b gibt es keinen Ball $B(b, r)$, der ganz in $\mathbb{R} \backslash [a, b[=] - \infty, a[\cup [b, +\infty[$ enthalten ist.

$\Diamond$

Einige elementare Eigenschaften metrischer Räume und offener Mengen sind in folgendem Satz zusammengefasst.

1.8 Satz: *Sei* (X, d) *ein metrischer Raum. Dann gilt:*

(a) *Jede Teilmenge* $A \subset X$ *ist mit der Einschränkung* $d|_{A \times A} : A \times A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ *selbst ein metrischer Raum.*

(b) *Die leere Menge* $\emptyset$ *und die Menge* X *sind offen und abgeschlossen in* X.

(c) *Beliebige Vereinigungen offener Mengen in* X *sind offen in* X, *d.h. sind* A_i, $i \in I$ *(*I *eine beliebige Indexmenge) offene Mengen, dann ist auch* $\bigcup_{i \in I} A_i$ *offen.*

(d) *Endliche Durchschnitte offener Mengen in* X *sind offen in* X, *d.h. sind* $A_1, \ldots, A_n$, $n \in \mathbb{N}$, *offene Mengen, so ist auch* $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ *offen.*

Beweis: (a) Da die Axiome (M1)–(M3) für alle $x, y, z \in X$ gelten, sind sie natürlich insbesondere für alle $x, y, z \in A$ gültig.

(b) Da die leere Menge gar kein Element enthält, ist die Bedingung an offene Mengen trivialerweise erfüllt. Also ist $\emptyset$ offen. Da für alle $x \in X$ und $r > 0$ nach Definition $B(x, r) \subset X$ gilt, ist auch X offen. Da $\emptyset$ das Komplement von X ist und umgekehrt, sind beide Mengen auch abgeschlossen.

(c) Seien A_i, $i \in I$, offene Mengen in X und $A := \bigcup_{i \in I} A_i$. Ist nun $x \in A$, so gilt $x \in A_i$ für mindestens ein $i \in I$. Da A_i offen ist, gilt $B(x, r) \subset A_i \subset A$ für ein $r > 0$. Also ist A offen.

(d) Seien $A_1, \ldots, A_n$, $n \in \mathbb{N}$, offen in X und $A := \bigcap_{i=1}^n A_i$. Ist $x \in A$, so ist $x \in A_i$ für $i = 1, \ldots, n$. Daher gibt es $r_i > 0$ mit $B(x, r_i) \subset A_i$ für $i = 1, \ldots, n$. Für $r := \min(r_1, \ldots, r_n)$ gilt dann $r > 0$ und

$$B(x, r) = \{y \in X | d(x, y) < r\} \subset \{y \in X | d(x, y) < r_i\} \subset A_i \quad \text{für } i = 1, \ldots, n.$$

Daraus folgt $B(x, r) \subset A$. Also ist A offen. □

Eine Teilmenge $A \subset X$ mit der eingeschränkten Metrik $d|_{A \times A}$ nennen wir auch einen **Teilraum** von (X, d).

1.9 Bemerkung: Noch zwei wichtige Bemerkungen:

- Offenheit und Abgeschlossenheit sind relative Begriffe. Eine Menge $A \subset B \subset X$, die im Teilraum B offen ist, muss z.B. in X nicht offen sein. In der Tat ist ja nach Satz 1.8 jede Menge A relativ zu A als Teilraum von X offen und abgeschlossen, während A relativ zu X weder offen noch abgeschlossen sein muss.

- Beliebige Durchschnitte und endliche Vereinigungen abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen, was direkt aus Satz 1.8(iii) und (iv) folgt.

Als einfache Folgerung aus der Dreiecksungleichung ergibt sich die sogenannte *Dreiecksungleichung nach unten* (bzw. *umgekehrte Dreiecksungleichung*), die wir auch schon aus Analysis I kennen (Bemerkung 2.15):

1.10 Satz: *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann gilt für alle $x, y, z \in X$:*

$$|d(x, z) - d(z, y)| \leq d(x, y).$$

Beweis: Wir müssen zeigen, dass $d(x, z) - d(z, y) \leq d(x, y)$ und $d(z, y) - d(x, z) \leq d(x, y)$. Unter Verwendung der Symmetrie der Metrik, sehen wir, dass diese Ungleichungen äquivalent sind zu $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ und $d(z, y) \leq d(z, x) + d(x, y)$. Also folgt die Behauptung aus der gewöhnlichen Dreiecksungleichung. □

Relativ zu einer Teilmenge eines metrischen Raums X können wir die Punkte von X disjunkt in drei Mengen zerlegen.

1.11 Definition: *Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$ eine Teilmenge. Ein Punkt $x \in X$ heißt*

(i) **innerer Punkt** *von A, falls $r > 0$ existiert mit $B(x, r) \subset A$.*

(ii) **äußerer Punkt** *von A, falls $r > 0$ existiert mit $B(x, r) \subset X \backslash A$.*

(iii) **Randpunkt** *von A, falls $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ und $B(x, r) \cap (X \backslash A) \neq \emptyset$ für alle $r > 0$ gilt.*

Die Menge aller inneren Punkte von A nennen wir das **Innere** *von A, in Zeichen A°. Die Menge aller Randpunkte von A nennen wir den* **Rand** *von A, in Zeichen ∂A. Zudem nennen wir die Vereinigung von A° und ∂A den* **Abschluss** *von A und schreiben dafür $\overline{A}$.*

1.12 Beispiel: Wir betrachten den metrischen Raum $(\mathbb{R}, d)$ mit $d(x, y) = |x - y|$. Sei $A = [a, b[$ mit $a < b$ ein halb-offenes Intervall. Dann gilt:

- $A^\circ =]a, b[$.
- $\partial A = \{a, b\}$.
- $\overline{A} = [a, b]$.

Das Gleiche gilt für $A =]a, b]$, $A = [a, b]$ und $A =]a, b[$. Begründung: Ist $x \in]a, b[$ und $r := \min(|x - a|, |x - b|)$, so ist $r > 0$ und es gilt $B(x, r) \subset A$ für jede dieser Mengen. Ist $x = a$ oder $x = b$, so enthält jeder Ball $B(x, r)$ Punkte, die außerhalb von A liegen und Punkte, die innerhalb von A liegen. Daraus ergeben sich die obigen Beziehungen.

Weitere Beispiele:

- Für $A = \mathbb{R}$ gilt $A^\circ = \mathbb{R}$, $\partial A = \emptyset$ und $\overline{A} = \mathbb{R}$.
- Für $A = \mathbb{Q}$ gilt $A^\circ = \emptyset$, $\partial A = \mathbb{R}$ und $\overline{A} = \mathbb{R}$.

$\Diamond$

1.13 Satz: *Sei A eine Teilmenge eines metrischen Raums (X, d). Dann gilt:*

(a) Die Menge der äußeren Punkte von A ist identisch mit $(X \backslash A)^\circ$. Zudem bilden die Mengen A°, ∂A und $(X \backslash A)^\circ$ eine disjunkte Zerlegung von X.

(b) A° ist offen und $\partial A, \overline{A}$ sind abgeschlossen in X.

Beweis: (a) Klar nach Definition.

(b) Ist $x \in A^\circ$ und gilt $B(x, r) \subset A$, so gehören auch alle Punkte aus $B(x, r)$ zu A°, denn für $y \in B(x, r)$ gilt $B(y, r - d(y, x)) \subset B(x, r) \subset A$ (siehe Beispiel 1.6). Also gilt $B(x, r) \subset A^\circ$, d.h. A° offen. Folglich ist auch die Menge $(X \backslash A)^\circ$ der äußeren Punkte offen. Da nach (a) $\partial A = (A^\circ \cup (X \backslash A)^\circ)^c$ und die Vereinigung offener Mengen offen ist, ist ∂A abgeschlossen. Die Menge $\overline{A}$ ist das Komplement von $(X \backslash A)^\circ$, also auch abgeschlossen. $\square$

1.2 Folgen, Stetigkeit und Grenzwerte

Folgen in metrischen Räumen verallgemeinern Folgen in $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

1.14 Definition: *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine* **Folge (in X)** *ist eine Funktion $a : \mathbb{N} \to X$, $n \mapsto a(n) = a_n$, geschrieben $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Die Punkte a_n, $n \in \mathbb{N}$, heißen auch die* **Folgenglieder** *der Folge. Ist $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine streng monoton wachsende Funktion, so heißt die Funktion $n \mapsto a_{k_n}$, geschrieben $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$,* **Teilfolge** *von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Sprechweise: Ist A eine Teilmenge von X, so sagen wir, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine Folge in A, falls $a_n \in A$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

1.15 Definition: *Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in (X, d) heißt* **konvergent**, *falls es ein $a \in X$ gibt, so dass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ existiert mit*

$$a_n \in B(a, \varepsilon) \quad \text{für alle } n \geq N. \tag{1}$$

Der Punkt a heißt dann der **Grenzwert** *oder* **Limes** *der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Wir schreiben auch $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ oder $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$ und sagen, dass die Folge gegen a* **konvergiert**.

1.16 Bemerkung: Natürlich ist die Bedingung (1) äquivalent zu

$$d(a_n, a) < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N.$$

1.17 Satz: *Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum (X, d) hat höchstens einen Grenzwert. Konvergiert eine Folge, so hat sie also genau einen Grenzwert.*

Beweis: Übungsaufgabe □

1.18 Definition: *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in (X, d). Ein Punkt $a \in X$ heißt* **Häufungswert** *von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, falls es eine Teilfolge $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ gibt, die gegen a konvergiert.*

Der sehr einfache Beweis des folgenden Satzes ist eine Übungsaufgabe (Teil (b) wird genauso bewiesen wie der entsprechende Satz in Analysis I):

1.19 Satz: *Sei (X, d) ein metrischer Raum und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X. Dann gilt:*

(a) *Die Häufungswerte von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind genau diejenigen Punkte $x \in X$, so dass für jede Umgebung U von x (bzw. für jeden Ball der Form $B(x, r)$ mit $r > 0$) gilt: $a_n \in U$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$.*

(b) *Konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $a \in X$, so konvergiert auch jede Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a. In diesem Fall hat $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ also genau einen Häufungswert, nämlich den Grenzwert a.*

Mit Hilfe von Folgen können wir eine oftmals sehr hilfreiche Charakterisierung abgeschlossener Mengen beweisen.

1.20 Satz: *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Menge $A \subset X$ ist genau dann abgeschlossen, wenn gilt: Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in A mit $\lim_{n\to\infty} a_n = x$ für ein $x \in X$, so gilt $x \in A$.*

Beweis: „$\Rightarrow$“: Sei A abgeschlossen und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in A mit Grenzwert $x \in X$. Wir machen die Widerspruchsannahme, dass $x \in X\backslash A$. Da $X\backslash A$ offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $B(x, \varepsilon) \subset X\backslash A$. Wähle $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass $a_n \in B(x, \varepsilon)$ für alle $n \geq N$. Dann folgt $a_n \notin A$ für alle $n \geq N$, ein Widerspruch!

„$\Leftarrow$“: Nun gelte umgekehrt, dass die Grenzwerte aller konvergenten Folgen in A Elemente von A sind. Wir machen die Widerspruchsannahme, dass A nicht abgeschlossen ist. Dann ist $X\backslash A$ nicht offen und folglich existiert $x \in X\backslash A$ mit $B(x, \frac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir können daher eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A finden mit $a_n \in B(x, \frac{1}{n})$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Diese Folge konvergiert aber gegen x, da $d(a_n, x) < 1/n$, ein Widerspruch! □

Mit Hilfe von Folgen können wir auch den Begriff der Stetigkeit für Funktionen zwischen metrischen Räumen einführen. Es gibt allerdings auch andere, äquivalente Charakterisierungen.

1.21 Satz und Definition: *Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und $f : X \to Y$ eine Funktion. Dann heißt f* **stetig in x** $\in X$*, falls eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:*

(i) Für jede gegen x konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X konvergiert die durch $y_n := f(x_n)$ definierte Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f(x)$.

(ii) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, so dass für beliebige $\tilde{x} \in X$ gilt:

$$d_X(x, \tilde{x}) < \delta \quad \Rightarrow \quad d_Y(f(x), f(\tilde{x})) < \varepsilon.$$

(iii) Zu jeder Umgebung V von $f(x)$ gibt es eine Umgebung U von x, so dass $f(U) \subset V$.

Wir nennen f **stetig***, falls f in jedem Punkt $x \in X$ stetig ist.*

Beweis: Wir müssen die Äquivalenz von (i)–(iii) zeigen:

(i) $\Rightarrow$ (ii): Angenommen (i) gilt und (ii) gilt nicht (Widerspruchsannahme). Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass zu jedem $\delta_n := \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, ein $x_n \in X$ existiert mit $d_X(x, x_n) < \delta_n$ und $d_Y(f(x), f(x_n)) \geq \varepsilon$. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert offensichtlich gegen x, aber die Folge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht gegen $f(x)$, da $f(x_n) \in X\backslash B(f(x), \varepsilon)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, ein Widerspruch!

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Sei V eine beliebige Umgebung von $f(x)$. Dann gibt es eine offene Menge A in X mit $f(x) \in A \subset V$. Folglich gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $B(f(x), \varepsilon) \subset$

$A \subset V$. Nach (ii) gibt es ein $\delta = \delta(\varepsilon)$, so dass $f(B(x,\delta)) \subset B(f(x),\varepsilon)$. Mit $U := B(x,\delta)$ folgt die Behauptung.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen x konvergente Folge und $\varepsilon > 0$. Die Menge $V := B(f(x),\varepsilon)$ ist eine Umgebung von $f(x)$. Nach (iii) existiert deshalb eine Umgebung U von x mit $f(U) \subset V$. Weiter existiert (wie oben) ein $\delta > 0$ mit $B(x,\delta) \subset U$. Sei $N \in \mathbb{N}$ so groß gewählt, dass $x_n \in B(x,\delta)$ für alle $n \geq N$. Dann folgt $f(x_n) \in f(B(x,\delta)) \subset f(U) \subset B(f(x),\varepsilon)$ für alle $n \geq N$. Folglich konvergiert $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f(x)$. □

1.22 Bemerkung: Die Charakterisierung (i) stetiger Funktionen wird uns noch oft in der Schreibweise

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\Big(\lim_{n\to\infty} x_n\Big) \tag{2}$$

begegnen. In Worten: Stetige Funktionen vertauschen mit der Bildung von Grenzwerten.

Beachte: Anschaulich bedeutet die Stetigkeit einer Funktion, dass die Funktion keine „Sprungstellen“ hat. Diese Anschauung kann aber manchmal irreführend sein, siehe die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}, \qquad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Für die Stetigkeit auf dem gesamten Definitionsbereich gibt es noch eine weitere sehr hilfreiche Charakterisierung.

1.23 Satz: *Eine Funktion $f : X \to Y$ zwischen metrischen Räumen ist genau dann stetig, wenn das Urbild $f^{-1}(O)$ von jeder in Y offenen Menge O offen in X ist.*

Beweis: „$\Rightarrow$“: Sei f stetig und $O \subset Y$ offen. Wähle $x \in f^{-1}(O)$ beliebig. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass $B(f(x),\varepsilon) \subset O$. Wähle $\delta > 0$ so, dass aus $d_X(x,\tilde{x}) < \delta$ folgt, dass $d_Y(f(x),f(\tilde{x})) < \varepsilon$. Dann gilt $B(x,\delta) \subset f^{-1}(O)$. Also ist $f^{-1}(O)$ offen in X.

„$\Leftarrow$“: Das Urbild jeder offenen Menge unter f sei offen. Seien $x \in X$ und $\varepsilon > 0$. Dann ist $U := f^{-1}(B(f(x),\varepsilon))$ offen in X. Da $x \in U$, existiert ein $\delta > 0$ mit $B(x,\delta) \subset U$. Also gilt $f(B(x,\delta)) \subset B(f(x),\varepsilon)$ oder äquivalent: $d(x,\tilde{x}) < \delta$ impliziert $d(f(x),f(\tilde{x})) < \varepsilon$. Also ist f stetig in x. □

1.24 Bemerkung: Eine wichtige Konsequenz aus dem obigen Satz ist, dass die Stetigkeit einer Funktion nur von der Familie aller offenen Mengen abhängt und nicht von der konkreten Metrik. Denn verschiedene Metriken können dieselben offenen Mengen erzeugen. Zum Beispiel erzeugt jede Norm auf dem $\mathbb{K}^n$ mittels der induzierten Metrik $d(x,y) = \|x-y\|$ dieselbe Familie offener Mengen.

1.25 Satz: *Folgende Funktionen sind stetig:*

(a) die Identität id_X *auf einem beliebigen metrischen Raum*

(b) alle konstanten Funktionen zwischen metrischen Räumen

(c) die Einschränkung einer stetigen Funktion $f : X \to Y$ *auf eine Teilmenge* $A \subset X$*, also* $f|_A : A \to Y$

(d) die Komposition $g \circ f$ *zweier stetiger Funktionen* $f : X \to Y$ *und* $g : Y \to Z$

Beweis: (a)–(c) sind sehr leicht einzusehen. Wir zeigen daher nur (d). Hierzu zwei Beweise:

- Seien X, Y, Z metrische Räume und $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ stetige Funktionen. Mit Satz 1.23 folgt: Ist $O \subset Z$ offen, so ist auch $g^{-1}(O)$ offen in Y. Dann ist auch $f^{-1}(g^{-1}(O)) = (g \circ f)^{-1}(O)$ offen in X.
- Punktweise Version: Ist f stetig in x und g stetig in $f(x)$, so ist $g \circ f$ stetig in x. Ist nämlich $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen x konvergente Folge, so konvergiert die durch $y_n := f(x_n)$ definierte Folge gegen $f(x)$, weil f in x stetig ist. Dann konvergiert aber auch die durch $z_n := g(y_n)$ definierte Folge gegen $g(f(x))$, weil g in $f(x)$ stetig ist.

□

Beispiele für stetige Funktionen sind: alle polynomialen Funktionen sowie die aus Analysis I bekannten Funktionen $\exp, \ln, \sin, \cos, \ldots$.

Da mit einem metrischen Raum auch stets eine Funktion gegeben ist, nämlich die Metrik $d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, ist es eine interessante Frage, ob diese Funktion stetig ist.

1.26 Beispiel: Ist (X, d) ein metrischer Raum, so ist die Metrik

$$d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$

eine stetige Funktion. Um dies zu sehen, wählen wir auf $X \times X$ die Metrik (siehe Übungsaufgaben)

$$d_{X\times X}((x_1, x_2), (y_1, y_2)) := \max\{d(x_1, y_1), d(x_2, y_2)\}.$$

Nun seien $(x_1, x_2) \in X \times X$ und $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Wir müssen zeigen, dass es ein $\delta > 0$ gibt, so dass aus $d_{X\times X}((x_1, x_2), (y_1, y_2)) < \delta$ stets $|d(x_1, x_2) - d(y_1, y_2)| < \varepsilon$ folgt. Dazu stellen wir zunächst fest, dass

$$\begin{aligned} d(x_1, x_2) &\leq d(x_1, y_1) + d(y_1, y_2) + d(y_2, x_2) \\ d(y_1, y_2) &\leq d(y_1, x_1) + d(x_1, x_2) + d(x_2, y_2) \end{aligned}$$

nach zweimaliger Anwendung der Dreiecksungleichung. Daraus folgt unter Verwendung der Symmetrie

$$|d(x_1, x_2) - d(y_1, y_2)| \leq d(x_1, y_1) + d(x_2, y_2) \leq 2d_{X\times X}((x_1, x_2), (y_1, y_2)).$$

Wählen wir nun $\delta = \frac{1}{2}\varepsilon$, so folgt die Behauptung. $\Diamond$

Auf metrischen Räumen lassen sich noch stärkere Stetigkeitsbegriffe einführen.

1.27 Definition: *Sei $f : X \to Y$ eine Funktion zwischen metrischen Räumen (X, d_X) und (Y, d_Y). Dann heißt f* **gleichmäßig stetig**, *falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für beliebige $x_1, x_2 \in X$ gilt:*

$$d_X(x_1, x_2) < \delta \quad \Rightarrow \quad d(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon.$$

Unterschied zur Stetigkeit: Reihenfolge der Quantoren!

Stetigkeit:

$$\forall x \in X\, \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall \tilde{x} \in X : d(x, \tilde{x}) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(\tilde{x})) < \varepsilon.$$

Gleichmäßige Stetigkeit:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x, \tilde{x} \in X : \; d(x, \tilde{x}) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(\tilde{x})) < \varepsilon.$$

Im Falle der Stetigkeit darf das δ also von x abhängen, im Falle der gleichmäßigen Stetigkeit muss es ein δ geben, das für alle x funktioniert!

1.28 Satz: *Gleichmäßig stetige Funktionen sind stetig.*

Beweis: Trivial. $\square$

1.29 Beispiel: Die reelle Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig, aber nicht gleichmäßig stetig. Warum nicht gleichmäßig? Nach dem Mittelwertsatz gibt es für alle $a < b$ ein $c \in (a, b)$, so dass

$$e^b - e^a = e^c(b - a),$$

wobei wir verwenden, dass $\exp' = \exp$. Zudem gilt $e^c > e^a$. Wir nehmen nun an, dass es zu gegebenem $\varepsilon := 1$ ein $\delta > 0$ wie in der Definition der gleichmäßigen Stetigkeit gibt (Widerspruchsannahme). Gilt dann $b = a + \frac{\delta}{2}$, so folgt

$$\frac{\delta}{2}e^a < 1 \quad \text{für alle } a \in \mathbb{R}.$$

Da $\lim_{a\to+\infty} e^a = +\infty$, kann dies nicht der Fall sein. Also ist exp nicht gleichmäßig stetig. $\Diamond$

Beachte: Im Gegensatz zur Stetigkeit hängt die Eigenschaft der gleichmäßigen Stetigkeit sehr wohl von der Wahl der Metrik ab. Auch wenn zwei Metriken dieselben offenen Mengen erzeugen, impliziert die gleichmäßige Stetigkeit in einer der beiden Metriken nicht unbedingt die gleichmäßige Stetigkeit in der anderen Metrik. Dazu ein Beispiel:

1.30 Beispiel: Sei $X := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. Betrachte die Funktion $\mathrm{id}_X : X \to X$, $x \mapsto x$. Diese Funktion ist natürlich gleichmäßig stetig, wenn wir auf Definitions- und Bildbereich die gleiche Metrik wählen, z.B. die Standardmetrik. Wählen wir aber auf dem Definitionsbereich die Standardmetrik $d(x,y) = |x-y|$ und auf dem Bildbereich die Metrik $d'(x,y) = |x^2 - y^2|$, so folgt[1]

$$d'(x,y) = |x^2 - y^2| = |(x+y)(x-y)| = |x+y||x-y| = (x+y)d(x,y).$$

Deshalb gibt es z.B. für $\varepsilon := 1$ kein $\delta > 0$, so dass aus $d(x,y) < \delta$ stets $d'(f(x), f(y)) = d'(x,y) < 1$ folgt. Der Term $(x+y)$ kann nämlich beliebig groß werden. Beachte hierbei, dass d' dieselben offenen Mengen auf X erzeugt wie d. Dies folgt aus den Implikationen (wobei o.B.d.A. $x^2 > \varepsilon$)

$$\begin{aligned} d(x,y) < \varepsilon \quad &\Rightarrow \quad d'(x,y) < (x+y)\varepsilon < (2x+\varepsilon)\varepsilon, \\ d'(x,y) < \varepsilon \quad &\Rightarrow \quad d(x,y) < \frac{\varepsilon}{x+y} < \frac{\varepsilon}{x + \sqrt{x^2 - \varepsilon}}. \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung sieht man wie folgt: Aus $(x+y)(x-y) \leq d'(x,y) < \varepsilon$ folgt $x^2 - y^2 < \varepsilon$, also $y^2 > x^2 - \varepsilon$. Dies impliziert $y > \sqrt{x^2 - \varepsilon}$, also $x + y > x + \sqrt{x^2 - \varepsilon}$. Ist also z.B. A offen in (X,d) und $x \in A$ mit $B(x, \varepsilon; d) \subset A$, so folgt

$$B(x, (2x-\varepsilon)\varepsilon; d') \subset B(x, \varepsilon; d) \subset A.$$

Also ist A auch in (X, d') offen. Die umgekehrte Implikation zeigt man analog.

Wir verallgemeinern nun den Begriff des Grenzwerts von Folgen auf allgemeine Funktionen zwischen metrischen Räumen. Dazu führen wir zunächst den Begriff des *Häufungspunktes* einer Menge ein (nicht zu verwechseln mit Häufungswerten von Folgen).

1.31 Definition: *Sei (X,d) ein metrischer Raum und $A \subset X$. Ein Punkt $a \in X$ heißt* **Häufungspunkt** *von A, falls für jedes $\varepsilon > 0$ gilt:*

$$A \cap (B(a, \varepsilon) \backslash \{a\}) \neq \emptyset.$$

Ein Häufungspunkt von A ist also ein Punkt a, so dass in jeder Umgebung von a ein von a verschiedener Punkt von A liegt. Daraus folgt, dass jede Umgebung von a unendlich viele Elemente von A enthält. Die Menge A „häuft" sich also bei a.

[1] Beachte: Die Funktion $x \mapsto x^2$ ist injektiv auf X. Aus einer Übungsaufgabe wissen wir deshalb, dass d' eine Metrik ist.

1.32 Definition: *Gegeben sei eine Funktion $f : D \subset X \to Y$, wobei (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume sind. Sei $a \in X$ ein Häufungspunkt von D. Dann heißt $b \in Y$* **Grenzwert** *von f bei a, in Zeichen*

$$b = \lim_{x \to a} f(x),$$

falls für jede gegen a konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $D\backslash\{a\}$ die Beziehung $b = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$ gilt.

Im Fall $Y = \mathbb{R}$ sind auch die uneigentlichen Grenzwerte $b = \pm\infty$ zugelassen.

1.33 Bemerkung: Beachte, dass der Punkt a nicht zu D gehören muss! Insbesondere muss die Funktion f in a nicht definiert sein.

1.34 Beispiel: Wir betrachten die Funktion

$$f(x, y) := \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad f : \mathbb{R}^2\backslash\{(0, 0)\} \to \mathbb{R}.$$

Diese Funktion ist auf ihrem gesamten Definitionsbereich stetig.[2] Insbesondere existiert deshalb für jedes $(a, b) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0, 0)\}$ der Grenzwert

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b).$$

Wir untersuchen nun, ob der Grenzwert $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ existiert. Betrachten wir zunächst nur Folgen auf den beiden Koordinatenachsen, also $((u_n, 0))_{n\in\mathbb{N}}$ oder $((0, v_n))_{n\in\mathbb{N}}$, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(u_n, 0) = 0 = \lim_{n\to\infty} f(0, v_n),$$

so dass man also annehmen könnte, dass der Grenzwert bei $(0, 0)$ existiert und den Wert 0 annimmt. Das dies nicht so ist, sehen wir, indem wir die Folge $(x_n, y_n) := (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ betrachten, denn

$$f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{1}{n^2}}{2\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Also existiert der Grenzwert $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ nicht. Insbesondere können wir f also nicht stetig nach $\mathbb{R}^2$ fortsetzen.

Analog zum entsprechenden Beweis für Folgen, zeigt man folgende δ-ε-Bedingung für Konvergenz:

1.35 Satz: *Gegeben sei eine Funktion $f : D \subset X \to Y$, wobei (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume sind. Sei $a \in X$ ein Häufungspunkt von D. Die Funktion f besitzt bei a genau dann den Grenzwert $b \in Y$, wenn*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D : \ 0 < d_X(x, a) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), b) < \varepsilon.$$

[2] Falls das an dieser Stelle noch nicht ganz klar ist, nehmen wir das einfach als gegeben an. Im Verlauf der Vorlesung wird es auf jeden Fall noch klar werden.

Analog zur Stetigkeit zusammengesetzter Funktionen zeigt man zudem folgenden Satz.

1.36 Satz: *Gegeben seien metrische Räume X, Y, Z und Teilmengen $A \subset X$, $B \subset Y$. Zudem seien Funktionen $f : A \to B$ und $g : B \to Z$ gegeben, sowie Häufungspunkte a von A und b von B. Existieren dann die Grenzwerte*

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \quad \textit{und} \quad \lim_{y \to b} g(y) = c,$$

und gilt $f(x) \neq b$ für alle $x \in A \backslash \{a\}$, so besitzt $g \circ f : A \to Z$ bei a den Grenzwert c, also:

$$\lim_{x \to a} g(f(x)) = \lim_{y \to b} g(y) = \lim_{y \to \lim_{x \to a} f(x)} g(y).$$

Ein wichtige Frage im Zusammenhang mit Grenzwerten ist die nach der Vertauschbarkeit von Grenzübergängen, die oft in der Form

$$\lim_{x \to a} \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} \lim_{x \to a} f_n(x)$$

für eine Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auftritt. Dazu folgendes Beispiel.

1.37 Beispiel: Betrachte die Funktionenfolge $f_n(x) := x^n$, $f_n : [0, 1[\to \mathbb{R}$. Offensichtlich ist $x = 1$ ein Häufungspunkt von $[0, 1[$. Weiter gilt

$$\lim_{x \to 1} \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{x \to 1} 0 = 0 \neq 1 = \lim_{n \to \infty} 1 = \lim_{n \to \infty} \lim_{x \to 1} f_n(x).$$

Die Vertauschbarkeit von Grenzübergängen ist also nicht immer möglich. Eine hinreichende Bedingung für die Vertauschbarkeit ist die gleichmäßige Konvergenz der Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Dies werden wir aber erst im nächsten Abschnitt beweisen.

1.3 Vollständigkeit, Kompaktheit und Zusammenhang

Nicht alle metrischen Räume eignen sich gleich gut, um darauf Analysis zu betreiben. Wir führen in diesem Abschnitt ein paar Eigenschaften metrischer Räume ein, für die sich sehr schöne Resultate beweisen lassen.

1.3.1 Vollständigkeit

Wir führen zunächst den Begriff der Beschränktheit ein.

1.38 Definition: *Ein metrischer Raum (X, d) heißt* **beschränkt**, *falls es $x \in X$ und $r > 0$ gibt mit $B(x, r) = X$. Eine Teilmenge A eines metrischen Raums heißt beschränkt, falls $A \subset B(x, r)$ für ein $x \in X$. Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X heißt beschränkt, falls $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt ist.*

Wie folgendes Beispiel zeigt, hängt es von der Wahl der Metrik ab (und nicht nur von der Familie der offenen Mengen), ob eine Menge beschränkt ist.

1.39 Beispiel: Sei (X, d) ein beliebiger metrischer Raum. Mit der neuen Metrik

$$\tilde{d}(x, y) := \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

wird $(X, \tilde{d})$ ein beschränkter metrischer Raum. Eine Menge $A \subset X$ ist genau dann offen in (X, d), wenn sie in $(X, \tilde{d})$ offen ist. Zum Nachweis der Axiome:

(M1) Es gilt $\tilde{d}(x, y) = 0$ genau dann, wenn $d(x, y) = 0$.

(M2) Die Symmetrie ist offensichtlich.

(M3) Die Dreiecksungleichung kann man nachweisen, indem man die Ungleichung

$$\frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \leq \frac{d(x, z)}{1 + d(x, z)} + \frac{d(z, y)}{1 + d(z, y)}$$

mit dem gemeinsamen Nenner $(1 + d(x, y))(1 + d(x, z))(1 + d(z, y))$ durchmultipliziert und die Dreiecksungleichung in (X, d) anwendet.

Die Aussage über die offenen Mengen ergeben sich aus den leicht nachzuweisenden Implikationen

$$d(x, y) < \varepsilon \Rightarrow \tilde{d}(x, y) < \varepsilon \quad \text{und} \quad d(x, y) < \varepsilon \Rightarrow \tilde{d}(x, y) < \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon},$$

wobei die zweite Implikation für $\varepsilon \in]0, 1[$ gilt. Für die Bälle in den Metriken d und $\tilde{d}$ folgt daraus

$$B(x, \varepsilon; d) \subset B(x, \varepsilon; \tilde{d}) \subset B(x, \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon}; d).$$

Mittels der Definition offener Mengen folgt damit sofort, dass eine Menge $A \subset X$ genau dann in (X, d) offen ist, wenn sie in $(X, \tilde{d})$ offen ist. $\Diamond$

Um die wichtige Klasse der *vollständigen* metrischen Räume zu definieren, benötigen wir den Begriff der Cauchy-Folge.

1.40 Definition: *Sei (X, d) ein metrischer Raum und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X. Dann heißt $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$* **Cauchy-Folge***, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n, m \geq N$ gilt, dass $d(a_n, a_m) < \varepsilon$.*

1.41 Bemerkung: Es ist unmittelbar klar, dass eine konvergente Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (mit Grenzwert a) eine Cauchy-Folge ist, denn die Dreiecksungleichung liefert $d(a_n, a_m) \leq d(a_n, a) + d(a, a_m)$. Umgekehrt konvergiert aber nicht jede Cauchy-Folge. Dies kann daran liegen, dass der einzige in Frage kommende Grenzwert gerade kein Element des zugrundeliegenden metrischen Raums ist. Zum Beispiel konvergiert $a_n := \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, in $X = \mathbb{R}$, aber nicht in $Y = \mathbb{R} \backslash \{0\}$.

1.42 Satz: *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in einem metrischen Raum (X, d). Dann gilt:*

(a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt.

(b) Hat $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einen Häufungswert a, so konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a.

Beweis: (a) Sei $\varepsilon_1 := 1$. Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist, existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $d(a_n, a_N) < \varepsilon_1$ für alle $n \geq N$. Sei nun $\varepsilon_2 := \max\{d(a_n, a_N) : 1 \leq n < N\}$. Dann gilt $a_n \in B(a_N, \varepsilon)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $\varepsilon := \max\{\varepsilon_1, 2\varepsilon_2\}$.

(b) Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es eine Teilfolge $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ und $N_1 \in \mathbb{N}$ mit $a_{k_n} \in B(a, \frac{\varepsilon}{2})$ für alle $n \geq N_1$. Andererseits gibt es ein $N_2 \in \mathbb{N}$ mit $d(a_n, a_m) < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n, m \geq N_2$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq \max\{N_1, N_2\}$ gilt dann

$$d(a_n, a) \leq d(a_n, a_{k_n}) + d(a_{k_n}, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Also konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a. □

Nun können wir die zentrale Definition in diesem Unterabschnitt formulieren.

1.43 Definition: *Ein metrischer Raum (X, d) heißt* **vollständig***, falls jede Cauchy-Folge in X konvergiert.*

1.44 Beispiel: Der Raum $(\mathbb{R}, d)$ mit der Standardmetrik $d(x, y) = |x - y|$ ist vollständig, da jede Cauchy-Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $(\mathbb{R}, d)$ beschränkt ist (Satz 1.42(a)) und damit (wie aus Analysis I bekannt) einen Häufungswert hat. Da der Häufungswert einer Cauchy-Folge zugleich ihr Grenzwert ist (Satz 1.42(b)), folgt die Behauptung.

Der folgende Satz zeigt, wie sich der Begriff der Vollständigkeit mit dem der Abgeschlossenheit verträgt.

1.45 Satz: *Abgeschlossene Teilmengen vollständiger metrischer Räume sind selbst vollständige metrische Räume.*

Beweis: Sei (X, d) vollständig und $A \subset X$ abgeschlossen. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in A. Dann konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ein $x \in X$. Da A abgeschlossen ist, folgt $x \in A$ nach Satz 1.20, also ist $(A, d|_{A\times A})$ vollständig. □

Ein für die Entwicklung der Differentialrechnung und auch in vielen anderen Teilbereichen der Mathematik wichtiger Satz ist der *Banach'sche Fixpunktsatz*. Dieser liefert eine hinreichende Bedingung dafür, dass eine Funktion $f : X \to X$, deren Definitionsbereich mit dem Bildbereich übereinstimmt, einen **Fixpunkt** hat, d.h. dass ein $x \in X$ existiert mit

$$f(x) = x.$$

Zahlreiche Existenzbeweise in der Mathematik werden so geführt, dass man eine Funktion definiert, deren Fixpunkte alle Eigenschaften des gesuchten Objekts erfüllen, und dann die Existenz eines solchen Fixpunktes durch Anwendung eines abstrakten Fixpunktsatzes erhält.

1.46 Satz: *Sei (X,d) ein vollständiger metrischer Raum und $f : X \to X$ eine Kontraktion. Das heißt, es gibt eine Konstante $K \in [0,1[$ mit*

$$d(f(x), f(y)) \leq K d(x,y) \quad \text{für alle } x, y \in X.$$

Dann hat f genau einen Fixpunkt $x_* \in X$. Zudem konvergiert jede durch

$$x_{n+1} := f(x_n), \quad x_1 \in X$$

rekursiv definierte Folge gegen x_*.

Beweis: Der Beweis ist in drei Schritte unterteilt.

Schritt 1: Wir zeigen zunächst, dass jede rekursiv durch $x_{n+1} := f(x_n)$, $x_1 \in X$, definierte Folge eine Cauchy-Folge ist. Es gilt

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(f(x_{n-1}), f(x_n)) \leq K d(x_{n-1}, x_n) \quad \text{für alle } n \geq 2,$$

was mittels vollständiger Induktion zur Abschätzung

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq K^{n-1} d(x_1, x_2) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

führt. Für beliebige $n, m \in \mathbb{N}$ mit $m > n$ folgt dann mit der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m) \\ &\leq (K^{n-1} + \cdots + K^{m-2}) d(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Beziehung $(1-K)(K^{n-1} + \cdots + K^{m-2}) = K^{n-1} - K^{m-1} < K^{n-1}$ folgt

$$d(x_n, x_m) \leq \frac{K^{n-1}}{1-K} d(x_1, x_2) \quad \text{für alle } m > n \geq 1. \tag{3}$$

Da $K < 1$, gilt $\lim_{n\to\infty} K^{n-1} = 0$. Folglich gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass die rechte Seite von (3) für alle $n \geq N$ kleiner als ε wird. Damit folgt, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist.

Schritt 2: Da (X,d) nach Voraussetzung vollständig ist, besitzt die Cauchy-Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einen Grenzwert x_*. Mit Hilfe der Stetigkeit von f, die unmittelbar aus der Kontraktionseigenschaft folgt,[3] erhalten wir

$$f(x_*) = f\Big(\lim_{n\to\infty} x_n\Big) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x_*.$$

Also ist x_* ein Fixpunkt von f.

[3] Es gilt sogar gleichmäßige Konvergenz: Sei $\varepsilon > 0$ und $\delta := \varepsilon$. Dann folgt aus $d(x,y) < \delta = \varepsilon$, dass $d(f(x), f(y)) \leq K d(x,y) < d(x,y) < \varepsilon$.

Schritt 3: Die Eindeutigkeit des Fixpunktes zeigt man wie folgt: Sei y_* neben x_* ein weiterer Fixpunkt. Dann folgt sofort der Widerspruch

$$d(x_*, y_*) = d(f(x_*), f(y_*)) \leq K d(x_*, y_*) < d(x_*, y_*).$$

Damit ist der Beweis abgeschlossen. $\square$

1.47 Bemerkung: Aus dem Beweis können wir u.a. Folgendes lernen: Ist $f : X \to X$ eine stetige Funktion und konvergiert eine Folge der Form $x_1 \in X$, $x_{n+1} = f(x_n)$ für alle $n \geq 1$, so ist der Grenzwert ein Fixpunkt von f.

Als weitere wichtige Anwendung der Vollständigkeit beweisen wir ein hinreichendes Kriterium für die Vertauschbarkeit von Grenzübergängen. Dazu müssen wir zunächst etwas ausholen, und Folgen von Funktionen zwischen metrischen Räumen betrachten. Formal ist eine solche Folge natürlich eine Abbildung von $\mathbb{N}$ in die entsprechende Menge von Funktionen $\{f : X \to Y\} = Y^X$. Wir schreiben dafür, wie üblich, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Zunächst definieren wir die gleichmäßige Konvergenz einer Funktionenfolge.

1.48 Definition: *Gegeben sei eine Menge D und ein metrischer Raum (X, d), sowie eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n : D \to X$ und eine weitere Funktion $F : D \to X$. Wir sagen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$* **konvergiert**

- **punktweise** *gegen F, falls zu jedem $x \in D$ und $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $d(f_n(x), F(x)) < \varepsilon$ für alle $n \geq N$.*
- **gleichmäßig** *gegen F, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $d(f_n(x), F(x)) < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ und $x \in D$.*

Klar: Gleichmäßige Konvergenz impliziert punktweise Konvergenz.

1.49 Beispiel: Wir betrachten die Funktionenfolge

$$f_n(x) := x^n, \quad f_n : [0,1] \to [0,1].$$

Offensichtlich konvergiert diese punktweise gegen die unstetige Grenzfunktion

$$F(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{für } x = 1 \end{cases}, \quad F : [0,1] \to [0,1].$$

Würde $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergieren, so käme also nur die Funktion F als Grenzfunktion in Frage. Dass hier aber keine gleichmäßige Konvergenz vorliegen kann, zeigt der folgende Satz.

1.50 Satz: *Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gleichmäßig konvergente Folge stetiger Funktionen $f_n : X \to Y$ zwischen metrischen Räumen mit Grenzfunktion F. Dann ist auch F stetig.*

Beweis: Seien $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Wir wählen $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass $d_Y(f_n(x), F(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $n \geq N$ und $x \in X$. Zudem wählen wir gemäß der Stetigkeit von f_N eine Zahl $\delta > 0$, so dass $d_Y(f_N(x), f_N(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3}$, falls $d_X(x, x_0) < \delta$. Dann folgt aus $d_X(x, x_0) < \delta$ mit der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} d_Y(F(x), F(x_0)) &\leq d_Y(F(x), f_N(x)) + d_Y(f_N(x), f_N(x_0)) + d_Y(f_N(x_0), F(x_0)) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Damit ist der Satz bewiesen. □

Das folgende *Cauchy-Kriterium* für die gleichmäßige Konvergenz einer Funktionenfolge wird häufig verwendet.

1.51 Satz: *Eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n : D \to X$ von einer beliebigen Menge D in einen vollständigen metrischen Raum (X, d) ist genau dann gleichmäßig konvergent, wenn gilt:*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall x \in D \; \forall n, m \geq N : \; d(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon. \tag{4}$$

Beweis: $\Rightarrow$: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Aus der gleichmäßigen Konvergenz gegen eine Grenzfunktion F folgt die Existenz von $N \in \mathbb{N}$ mit $d(f_k(x), F(x)) < \varepsilon/2$ für alle $x \in D$ und $k \geq N$. Also gilt

$$d(f_n(x), f_m(x)) \leq d(f_n(x), F(x)) + d(F(x), f_m(x)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

für alle $n, m \geq N$ und $x \in D$.

$\Leftarrow$: Aus der Bedingung (4) folgt, dass $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ für jedes $x \in D$ eine Cauchy-Folge in dem vollständigen metrischen Raum (X, d) ist. Also existiert der Grenzwert $F(x) := \lim_{n \to \infty} f_n(x)$. Für den Nachweis der gleichmäßigen Konvergenz sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit

$$d(f_n(x), f_m(x)) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } x \in D, \; n, m \geq N.$$

Halten wir dann in der Beziehung

$$0 \leq |d(f_m(x), f_n(x)) - d(f_n(x), F(x))| \leq d(f_m(x), F(x))$$

ein $n \geq N$ fest und lassen $m \to \infty$ gehen, so folgt

$$d(f_n(x), F(x)) < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in D, \; n \geq N.$$

Damit ist $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergent. □

Nun können wir den Satz über die Vertauschbarkeit von Grenzübergängen beweisen.

1.52 Satz: *Sei (X, d_X) ein metrischer Raum, (Y, d_Y) ein vollständiger metrischer Raum, $D \subset X$ eine Teilmenge und a ein Häufungspunkt von D. Konvergiert dann die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n : D \to Y$ gleichmäßig gegen eine Funktion $F : D \to Y$ und existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ der Grenzwert $A_n := \lim_{x\to a} f_n(x)$, so existieren die Grenzwerte*

$$\lim_{x\to a} F(x) \quad \textit{und} \quad \lim_{n\to\infty} A_n$$

und sind gleich. Es gilt also

$$\lim_{x\to a} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to a} f_n(x).$$

Beweis: Wir zeigen zunächst die Konvergenz von $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Sei dazu $\varepsilon > 0$ beliebig. Wegen der vorausgesetzten gleichmäßigen Konvergenz von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existiert nach Satz 1.51 ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$d_Y(f_n(x), f_m(x)) < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für alle } x \in D \text{ und } n, m \geq N. \tag{5}$$

Nach Satz 1.35 gibt es zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $\delta = \delta(k) > 0$ mit

$$d_Y(f_k(x), A_k) < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für alle } x \in (B(a,\delta) \cap D)\backslash\{a\}. \tag{6}$$

Zu beliebigen $n, m \geq N$ setzen wir nun $\delta_0 := \min(\delta(n), \delta(m))$. Aus (5) und (6) folgt dann für alle $x \in (B(a,\delta_0) \cap D)\backslash\{a\}$

$$\begin{aligned} d_Y(A_n, A_m) &\leq d_Y(A_n, f_n(x)) + d_Y(f_n(x), f_m(x)) + d_Y(f_m(x), A_m) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Also ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge im vollständigen metrischen Raum (Y, d_Y) und folglich konvergent.

Nun zeigen wir für $A := \lim_{n\to\infty} A_n$, dass $A = \lim_{x\to a} F(x)$ und schließen damit den Beweis ab. Sei dazu $\varepsilon > 0$ beliebig. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt es ein $N_1 \in \mathbb{N}$ mit

$$d_Y(f_n(x), F(x)) < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für alle } x \in D \text{ und } n \geq N_1. \tag{7}$$

Wegen $A = \lim_{n\to\infty} A_n$ gibt es ein $N_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$d_Y(A_n, A) < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für alle } n \geq N_2. \tag{8}$$

Mit $N := \max(N_1, N_2)$ folgt aus (6), (7) und (8) für alle $x \in (B(a, \delta(N)) \cap D)\backslash\{a\}$

$$\begin{aligned} d_Y(F(x), A) &\leq d_Y(F(x), f_N(x)) + d_Y(f_N(x), A_N) + d_Y(A_N, A) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Nach dem ε-δ-Kriterium für Grenzwerte ist dies äquivalent zu $A = \lim_{x\to a} F(x)$. □

1.3.2 Kompaktheit

Wir führen nun den (für praktisch alle Teilgebiete der Mathematik) wichtigen Begriff der Kompaktheit ein. Dazu benötigen wir zunächst den Begriff einer offenen Überdeckung.

1.53 Definition: *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Familie $\{A_i\}_{i \in I}$ (I eine beliebige Indexmenge) von Teilmengen $A_i \subset X$ heißt* **Überdeckung** *von X, falls $\bigcup_{i \in I} A_i = X$. Ist jede Menge A_i hierbei offen, so heißt $\{A_i\}_{i \in I}$* **offene Überdeckung** *von X. Eine* **Teilüberdeckung** *ist eine Familie $\{A_j\}_{j \in J}$, wobei $J \subset I$ und $\bigcup_{j \in J} A_j = X$.*

1.54 Definition: *Ein metrischer Raum (X, d) heißt* **kompakt**, *falls jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung besitzt.*

1.55 Beispiel: Jeder endliche metrische Raum (X, d) ist kompakt. Hat nämlich X nur endlich viele Elemente $x_1, \ldots, x_n$, so kann man zu jeder offenen Überdeckung $\{U_i\}_{i \in I}$ von X eine endliche Teilüberdeckung $\{U_{i_1}, \ldots, U_{i_n}\}$ finden, indem man zu jedem der Punkte x_j den Index i_j so wählt, dass $x_j \in U_{i_j}$. Insofern können wir Kompaktheit als eine Verallgemeinerung von Endlichkeit ansehen. $\Diamond$

Die Kompaktheit eines metrischen Raums lässt sich oftmals sehr viel einfacher mit Hilfe eines Folgenkriteriums nachweisen:

1.56 Satz: *Ein metrischer Raum ist genau dann kompakt, wenn jede Folge in X mindestens einen Häufungswert hat.*

Beweis: „$\Rightarrow$“: Sei (X, d) kompakt und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X ohne Häufungswert (Widerspruchsannahme). Dann hat jeder Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung U_x, so dass $a_n \in U_x$ nur für endlich viele $n \in \mathbb{N}$ gilt. Das Mengensystem $\{U_x\}_{x \in X}$ ist eine offene Überdeckung von X. Sei $\{U_{x_1}, \ldots, U_{x_k}\}$ eine endliche Teilüberdeckung. Es gilt also zum einen $X = U_{x_1} \cup \ldots \cup U_{x_k}$ und andererseits $a_n \in U_{x_1} \cup \ldots \cup U_{x_k}$ nur für endlich viele n, ein Widerspruch!

„$\Leftarrow$“: Nun gelte umgekehrt, dass jede Folge in X einen Häufungswert hat. Sei $\{U_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X. Der Beweis, dass $\{U_i\}_{i \in I}$ eine endliche Teilüberdeckung hat, ist in 3 Schritte unterteilt:

<u>Schritt 1:</u> Wir zeigen zunächst, dass es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass jeder offene ε-Ball in X in mindestens einer der Mengen U_i vollständig enthalten ist. Wäre dies nicht so, so würden Folgen $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}_{>0}$ und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X mit $\lim_{n \to \infty} \varepsilon_n = 0$ existieren, so dass $B(x_n, \varepsilon_n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ in keiner Überdeckungsmenge enthalten ist. Nach Voraussetzung hat $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ einen Häufungswert $x \in X$. Dann können wir o.B.d.A. annehmen, dass $\lim_{n \to \infty} x_n = x$, indem wir gegebenenfalls zu einer konvergenten Teilfolge übergehen. Sei U_i so gewählt, dass $x \in U_i$. Dann existiert ein $\delta > 0$ mit $B(x, \delta) \subset U_i$. Ist nun $n \in \mathbb{N}$ so groß,

dass $d(x, x_n) < \delta/2$ und $\varepsilon_n < \delta/2$, so folgt für jedes $y \in B(x_n, \varepsilon_n)$, dass $d(y, x) \leq d(y, x_n) + d(x_n, x) < \delta$, also $B(x_n, \varepsilon_n) \subset B(x, \delta) \subset U_i$, ein Widerspruch! Also existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass jeder ε-Ball vollständig in einer Menge U_i mit $i \in I$ enthalten ist.

Schritt 2: Wir zeigen, dass für jedes $\varepsilon > 0$ endlich viele ε-Bälle ausreichen, um X zu überdecken. Wir nehmen dazu an, dass es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass unendlich viele ε-Bälle nötig sind, um X zu überdecken (Widerspruchsannahme). Nun konstruieren wir rekursiv eine Folge in X ohne Häufungswert. Dazu sei $x_1 \in X$ beliebig gewählt. Da X nicht von $B_\varepsilon(x_1)$ überdeckt wird, existiert ein $x_2 \in X \backslash B_\varepsilon(x_1)$. Da auch $\{B_\varepsilon(x_1), B_\varepsilon(x_2)\}$ keine Überdeckung von X bildet, existiert ein $x_3 \in X \backslash (B_\varepsilon(x_1) \cup B_\varepsilon(x_2))$. Führen wir diese Konstruktion fort, so erhalten wir eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit der Eigenschaft, dass $d(x_n, x_k) \geq \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $1 \leq k < n$. Daraus folgt unmittelbar, dass keine Teilfolge von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge sein kann. Also hat $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ keinen Häufungswert, Widerspruch!

Schritt 3: Um den Beweis abzuschließen, wählen wir $\varepsilon > 0$ so, dass jeder ε-Ball in einer der Mengen U_i enthalten ist und betrachten eine endliche Überdeckung von X durch ε-Bälle: $X = \bigcup_{j=1}^k B(x_j, \varepsilon)$. Sei $B(x_j, \varepsilon) \subset U_{i(j)}$. Dann folgt unmittelbar $X = \bigcup_{j=1}^k U_{i(j)}$. Also ist $\{U_{i(j)}\}_{j=1}^k$ eine endliche Teilüberdeckung von $\{U_i\}_{i \in I}$. □

Eine oft sehr hilfreiche Konsequenz aus dem Beweis ist die Existenz einer *Lebesgue-Zahl* für jede offene Überdeckung $\{U_i\}_{i \in I}$ eines kompakten metrischen Raums:

1.57 Korollar: *Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum. Dann gibt es zu jeder offenen Überdeckung $\{U_i\}_{i \in I}$ eine Zahl $\varepsilon > 0$, so dass jeder offene ε-Ball in X in einer der Überdeckungsmengen U_i vollständig enthalten ist.*

Die größte Zahl $\varepsilon > 0$ mit obiger Eigenschaft heißt *Lebesgue-Zahl* der Überdeckung $\{U_i\}_{i \in I}$.

Wir können nun die Kompaktheit in Zusammenhang zu den bereits eingeführten Begriffen der Vollständigkeit und Beschränktheit setzen.

1.58 Satz: *Jeder kompakte metrische Raum ist vollständig und beschränkt.*

Beweis: Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in (X, d). Nach Satz 1.56 hat $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ einen Häufungswert a. Nach Satz 1.42(ii) konvergiert $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen a. Also ist (X, d) vollständig. Um die Beschränktheit nachzuweisen, überdecken wir X mit endlich vielen 1-Bällen $B(x_1, 1), \ldots, B(x_k, 1)$ (als endliche Teilüberdeckung von $\{B(x, 1)\}_{x \in X}$). Sind nun $x, \tilde{x} \in X$ beliebig gewählt und gilt $d(x, x_i) < 1$, $d(x, x_j) < 1$, so folgt

$$d(x, \tilde{x}) \leq d(x, x_i) + d(x_i, x_j) + d(x_j, \tilde{x}) < 2 + \max_{1 \leq i,j \leq k} d(x_i, x_j) =: r.$$

Folglich gilt $B(x, r) = X$ (für jedes $x \in X$). □

Eine Teilmenge $A \subset X$ eines metrischen Raums (X, d) kann mit der Einschränkung der Metrik d auf $A \times A$ natürlich ein kompakter metrischer Raum sein, auch wenn (X, d) selbst nicht kompakt ist. Wenn wir von der Kompaktheit einer Teilmenge sprechen, meinen wir das immer in diesem Sinne. Wichtig ist es, Folgendes zu wissen: Wenn wir die Kompaktheit einer Teilmenge nachweisen wollen, können wir dazu Überdeckungen von A verwenden, die bzgl. A offen sind, aber auch solche, die bzgl. X offen sind.

1.59 Lemma: *Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$. Als Teilraum von X ist A genau dann kompakt, wenn zu jeder Familie $\{U_i\}_{i \in I}$ von Mengen $U_i \subset X$, die in X offen sind mit $A \subset \bigcup_{i \in I} U_i$, eine endliche Teilfamilie $\{U_{i_1}, \ldots, U_{i_n}\}$, $n \in \mathbb{N}$, existiert, so dass $A \subset \bigcup_{j=1}^{n} U_{i_j}$.*

Beweis: Übungsaufgabe □

Einige Eigenschaften kompakter Räume liefert uns der folgende Satz.

1.60 Satz: *Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und $f : X \to Y$ stetig. Dann gilt:*

(a) Ist X kompakt, so ist f gleichmäßig stetig.

(b) Ist $A \subset X$ kompakt, so ist A abgeschlossen in X.

(c) Ist $A \subset X$ kompakt, so ist auch $f(A) \subset Y$ kompakt.

(d) Ist X kompakt und f bijektiv, so ist $f^{-1} : Y \to X$ stetig.

Beweis: (a) Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Aufgrund der Stetigkeit existiert zu jedem $x \in X$ ein $\delta_x > 0$, so dass

$$d_X(x, \tilde{x}) < \delta_x \quad \Rightarrow \quad d_Y(f(x), f(\tilde{x})) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Die offenen Bälle $B(x, \frac{\delta_x}{2})$, $x \in X$, bilden eine offene Überdeckung von X. Aufgrund der Kompaktheit gibt es eine endliche Teilüberdeckung. Also gilt $X \subset B(x_1, \frac{\delta_{x_1}}{2}) \cup \cdots \cup B(x_n, \frac{\delta_{x_n}}{2})$ für gewisse $x_1, \ldots, x_n \in X$. Insbesondere gilt also für alle $x \in X$ und $i = 1, \ldots, n$ die Implikation

$$d_X(x, x_i) < \delta_{x_i} \quad \Rightarrow \quad d_Y(f(x), f(x_i)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wählen wir $\delta := \min_{1 \leq i \leq n} \frac{\delta_{x_i}}{2}$, so gilt $\delta > 0$. Nun seien $x, \tilde{x} \in X$ mit $d_X(x, \tilde{x}) < \delta$ beliebig gewählt. Wähle $i \in \{1, \ldots, n\}$ mit $d_X(x, x_i) < \frac{\delta_{x_i}}{2}$. Dann folgt

$$d_X(\tilde{x}, x_i) \leq d_X(\tilde{x}, x) + d(x, x_i) < \frac{1}{2}\delta_{x_i} + \frac{1}{2}\delta_{x_i} = \delta_{x_i}.$$

Daraus können wir folgern, dass

$$d_Y(f(x), f(\tilde{x})) \leq d_Y(f(x), f(x_i)) + d_Y(f(x_i), f(\tilde{x})) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

womit die gleichmäßige Stetigkeit von f gezeigt ist.

(b) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in A, die gegen ein $x \in X$ konvergiert. Da A kompakt ist, hat $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einen Häufungswert $a \in A$. Daraus folgt unmittelbar $x = a \in A$. Nach Satz 1.20 ist A also abgeschlossen.

(c) Sei $\{V_i\}_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von $f(A)$. Dann ist $\{U_i\}_{i\in I}$ mit $U_i := f^{-1}(V_i)$ eine offene Überdeckung von A. In der Tat, die Mengen U_i sind offen, da f stetig ist und sie bilden eine Überdeckung von A, da

$$\bigcup_{i\in I} f^{-1}(V_i) = f^{-1}\Big(\bigcup_{i\in I} V_i\Big) \supset f^{-1}(f(A)) \supset A.$$

Da A kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung $\{U_j\}_{j\in J}$, $J \subset I$ endlich. Dann ist $\{V_j\}_{j\in J}$ eine endliche Teilüberdeckung von $f(A)$, da

$$f(A) \subset f\Big(\bigcup_{j\in J} U_j\Big) = f\Big(\bigcup_{j\in J} f^{-1}(V_j)\Big) = f(f^{-1}\Big(\bigcup_{j\in J} V_j\Big)) \subset \bigcup_{j\in J} V_j.$$

(d) Wir zeigen die Stetigkeit von f^{-1}, indem wir zeigen, dass die Urbilder abgeschlossener Mengen unter f^{-1} abgeschlossen sind. Das Urbild einer Menge $A \subset X$ unter f^{-1} ist gerade das Bild $f(A) \subset Y$. Ist A abgeschlossen, so ist A nach einer Übungsaufgabe auch kompakt. Nach Aussage (c) ist dann $f(A)$ auch kompakt und nach (b) ist $f(A)$ folglich abgeschlossen in Y. □

Als Folgerung aus Teil (c) des vorherigen Satzes ergibt sich sofort:

1.61 Korollar: *Sei $f : X \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf einem kompakten metrischen Raum (X, d). Dann nimmt f auf X ein Minimum und ein Maximum an. Das heißt, es existieren $x_*, x^* \in X$ mit*

$$f(x_*) \le f(x) \le f(x^*) \quad \textit{für alle } x \in X.$$

Beweis: Da X kompakt ist, ist nach Satz 1.60(c) auch $f(X) \subset \mathbb{R}$ kompakt. Nach Satz 1.58 und Satz 1.60(b) ist $f(X)$ beschränkt und abgeschlossen. Also hat $f(X)$ ein Minimum a und ein Maximum b. Wir können also $x_* \in f^{-1}(a)$ und $x^* \in f^{-1}(b)$ beliebig wählen. □

1.62 Bemerkung: Beachte, dass Kompaktheit im Gegensatz zu Offenheit und Abgeschlossenheit kein relativer Begriff ist. Wenn wir entscheiden wollen, ob eine Teilmenge A eines metrischen Raums X offen oder abgeschlossen ist, müssen wir uns zuerst fragen: Relativ zu welcher Obermenge von A? Falls eine Teilmenge $A \subset X$ kompakt ist, so ist sie es unabhängig vom Referenzraum.

Im $\mathbb{R}^n$ lässt sich Kompaktheit sehr elegant charakterisieren (*Satz von Heine-Borel*). Dazu zunächst folgendes Lemma.

1.63 Lemma: *Jeder beschränkte und abgeschlossene Quader $Q = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ mit reellen Zahlen $a_i \le b_i$, $i = 1, \ldots, n$, ist kompakt.*

Beweis: Wir verwenden Satz 1.56. Sei also $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in Q. Jedes Folgenglied x_k ist ein Vektor mit n Komponenten, also $x_k = (x_{k,1}, \dots, x_{k,n})^\top$ und $x_{k,i} \in [a_i, b_i]$. Die Komponentenfolge $(x_{k,1})_{k\in\mathbb{N}}$ hat, wie wir aus Analysis I wissen, einen Häufungswert $c_1 \in [a_1, b_1]$. Es gilt also $\lim_{l\to\infty} x_{k_l,1} = c_1$ für eine geeignete Teilfolge $(x_{k_l,1})_{l\in\mathbb{N}}$. Dann hat auch die Folge $(x_{k_l,2})_{l\in\mathbb{N}}$ einen Häufungswert c_2 in $[a_2, b_2]$, wir finden also eine Teilfolge $(x_{k_{l_m},2})_{m\in\mathbb{N}}$, die gegen c_2 konvergiert. Dabei ist zu beachten, dass $(x_{k_{l_m},1})_{m\in\mathbb{N}}$ als Teilfolge von $(x_{k_l,1})_{l\in\mathbb{N}}$ gegen c_1 konvergiert. Führen wir diese Überlegung induktiv fort, so erhalten wir am Ende eine Teilfolge der ursprünglichen Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, die gegen ein $(c_1, \dots, c_n)^\top \in Q$ konvergiert. $\square$

1.64 Satz: *(Heine-Borel) Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.*

Beweis: Die eine Richtung des Beweises folgt aus Satz 1.60 und Satz 1.58, gilt also ganz allgemein für Teilmengen von metrischen Räumen. Die andere Beweisrichtung folgt aus Lemma 1.63. Ist nämlich $A \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige beschränkte und abgeschlossene Menge und $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von A, so finden wir wegen der Beschränktheit einer abgeschlossenen und beschränkten Quader Q mit $A \subset Q$. Dann ist $\mathcal{U} \cup \{A^c\}$ eine offene Überdeckung des ganzen $\mathbb{R}^n$, also insbesondere von Q. Da Q kompakt ist, gibt es endlich viele $U_1, \dots, U_r \in \mathcal{U}$, die zusammen mit A^c den Quader Q überdecken. Also bildet $\{U_1, \dots, U_r\} \subset \mathcal{U}$ eine endliche Überdeckung von A. $\square$

1.3.3 Zusammenhang

Schließlich führen wir noch den Begriff des *Zusammenhangs* eines metrischen Raums ein.

1.65 Definition: *Ein metrischer Raum (X, d) heißt* **unzusammenhängend**, *falls es nichtleere offene Mengen $U, V \subset X$ gibt, so dass $X = U \cup V$ und $U \cap V = \emptyset$. Ist X nicht unzusammenhängend, so heißt X* **zusammenhängend**.

Ein metrischer Raum ist also genau dann zusammenhängend, wenn er sich nicht in zwei disjunkte offene Mengen zerlegen lässt. Wie beim Kompaktheitsbegriff können wir auch vom Zusammenhang einer Teilmenge $A \subset X$ sprechen, wobei es wiederum egal ist, ob wir dazu in X offene Mengen oder in A offene Mengen verwenden.

1.66 Definition: *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine* **Zusammenhangskomponente** *von X ist eine maximale zusammenhängende Teilmenge von X. Das heißt, $A \subset X$ ist eine Zusammenhangskomponente von X, falls A zusammenhängend und jede echte Obermenge B von A unzusammenhängend ist.*

1.67 Satz: *Sei X ein zusammenhängender metrischer Raum. Dann sind $\emptyset$ und X die einzigen Teilmengen von X, die zugleich offen und abgeschlossen sind.*

Beweis: Sei $U \subset X$ eine Menge, die offen und abgeschlossen ist. Dann ist $V := U^c = X \backslash U$ auch offen (und abgeschlossen) und es gilt $U \cup V = X$, $U \cap V = \emptyset$. Da X nach Voraussetzung zusammenhängend ist, muss also eine der Mengen U, V leer sein, d.h. $U = \emptyset$ oder $U = X$. $\square$

1.68 Bemerkung: Der obige Satz wird in Beweisen oft folgendermaßen angewendet: Gegeben ist ein zusammenhängender metrischer Raum X. Es ist zu zeigen, dass eine Eigenschaft $E(x)$ für alle $x \in X$ gilt. Man betrachtet die Menge $A := \{x \in X : E(x)\}$ und zeigt, dass $A = X$ gilt, indem man nachweist, dass A nichtleer, offen und abgeschlossen ist. Nach dem obigen Satz folgt daraus sofort $A = X$, also $E(x)$ für alle $x \in X$.

1.69 Satz: *Sei $f : X \to Y$ eine stetige Funktion zwischen metrischen Räumen. Ist dann X zusammenhängend, so auch $f(X)$.*

Beweis: Wir machen die Widerspruchsannahme, dass $f(X)$ unzusammenhängend ist. Dann gibt es nichtleere offene Mengen $U, V \subset f(X)$ mit $U \cup V = f(X)$ und $U \cap V = \emptyset$. Es folgt $X = f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$ und $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = f^{-1}(U \cap V) = \emptyset$. Zudem sind $f^{-1}(U)$ und $f^{-1}(V)$ als Urbilder nichtleerer offener Mengen unter einer stetigen Funktion ebenfalls nichtleer und offen. Dies führt zu einem Widerspruch, da X nach Annahme zusammenhängend ist. $\square$

Um die zusammenhängenden offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ zu klassifizieren, führen wir den Begriff des *Polygon-Zusammenhangs* ein. Zunächst definieren wir für zwei Punkte $a, b \in \mathbb{R}^n$ die **Strecke** zwischen a und b als

$$\mathrm{Str}[a, b] := \{a + t(b - a) \in \mathbb{R}^n : t \in [0, 1]\}.$$

1.70 Definition: *Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt* **polygon-zusammenhängend**, *falls es zu je zwei Punkten $a, b \in A$ endlich viele Punkte $a_0, \ldots, a_r \in A$ gibt mit $a_0 = a$, $a_r = b$ und*

$$\mathrm{Str}[a_{k-1}, a_k] \subset A \quad \textit{für alle } k = 1, \ldots, r.$$

In diesem Fall sagen wir auch, dass es einen **Polygonzug** *von a nach b gibt.*

1.71 Beispiel: Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt *konvex*, falls zu je zwei Punkten $a, b \in A$ auch die gesamte Verbindungsstrecke $\mathrm{Str}[a, b]$ zu A gehört. Konvexe Mengen sind die einfachsten Beispiele für polygon-zusammenhängende Mengen. Zum Beispiel sind alle offenen sowie abgeschlossenen Bälle (definiert mittels einer Norm) und alle Quader im $\mathbb{R}^n$ konvex. Wir zeigen dies exemplarisch für einen offenen Ball

$$B(x, \varepsilon) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| < \varepsilon\}.$$

Seien $a, b \in B(x, \varepsilon)$ und $y = a + t(b - a) \in \mathrm{Str}[a, b]$, $t \in [0, 1]$. Dann gilt

$$\|y - x\| = \|a + t(b - a) - x\| = \|(1 - t)a + tb - (1 - t)x - tx\|$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \|(1-t)(a-x)\| + \|t(b-x)\| \\
&= (1-t)\|a-x\| + t\|b-x\| < (1-t)\varepsilon + t\varepsilon = \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Also gilt $\operatorname{Str}[a,b] \subset B(x,\varepsilon)$. Man beachte, dass dieses Argument unabhängig von der gewählten Norm ist. (Wir haben lediglich die Dreiecksungleichung und die Homogenität verwendet.)

1.72 Satz: *Für eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ gilt:*

(a) Ist A polygon-zusammenhängend, so ist A zusammenhängend.

(b) Ist A offen und zusammenhängend, so ist A polygon-zusammenhängend.

Beweis: (a) Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ polygon-zusammenhängend und unzusammenhängend (Widerspruchsannahme). Dann können wir A disjunkt in zwei nichtleere (relativ zu A) offene Mengen A_1 und A_2 zerlegen. Wir wählen Punkte $a_1 \in A_1$ und $a_2 \in A_2$. Dann finden wir einen Polygonzug in A von a_1 nach a_2. Insbesondere gibt es auf diesem Polygonzug eine Strecke $\operatorname{Str}[x,y]$ mit $x \in A_1$ und $y \in A_2$. Wir definieren nun

$$\sigma := \sup\{t \in [0,1] : x + t(y-x) \in A_1\} \in [0,1].$$

Dann gilt $x + \sigma(y-x) \in \partial(A \backslash A_1) \cap \partial(A \backslash A_2)$. Da diese Komplemente in A abgeschlossen sind, liegt $x + \sigma(y-x)$ weder in A_1 noch in A_2, also auch nicht in A, ein Widerspruch!

(b) Sei A offen und zusammenhängend und $a \in A$ beliebig. Wir betrachten die Menge $B \subset A$ aller Punkte, die wir von a aus durch einen Polygonzug in A erreichen können. Dann gilt $B \neq \emptyset$, da sicherlich $a \in B$. B ist offen in A, denn wenn man b von a aus durch einen Polygonzug erreichen kann, dann sicherlich auch jeden Punkt aus einem ε-Ball um b (da ε-Bälle konvex sind). Die Menge B ist aber auch abgeschlossen in A. Ist nämlich $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in B, die gegen ein $b \in A$ konvergiert, so gilt $B(b,\varepsilon) \subset A$ für ein klein genug gewähltes $\varepsilon > 0$, da A offen ist. Dann folgt $b_k \in B(b,\varepsilon)$ für alle hinreichend großen $k \in \mathbb{N}$. Innerhalb von $B(b,\varepsilon)$ können wir aber zwei Punkte durch eine Strecke verbinden, woraus $b \in B$ folgt. Insgesamt haben wir gezeigt, dass B nichtleer, offen und abgeschlossen in A ist. Mit Satz 1.67 folgt $B = A$. □

Aus obigen Sätzen ergeben sich folgende Korollare:

1.73 Korollar: *Eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist genau dann zusammenhängend, wenn sie ein Intervall ist.*

Beweis: Intervalle sind natürlich polygon-zusammenhängend und damit zusammenhängend. Ist umgekehrt $I \subset \mathbb{R}$ zusammenhängend und kein Intervall, so gibt es einen Punkt $c \in \mathbb{R} \backslash I$ mit $(-\infty,c) \cap I \neq \emptyset$ und $(c,\infty) \cap I \neq \emptyset$, ein Widerspruch zur Annahme, dass I zusammenhängend ist. □

1.74 Korollar: *(Zwischenwertsatz) Sei $f : X \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf einem zusammenhängenden metrischen Raum (X, d). Gilt dann $a, b \in f(X)$ mit $a \leq b$, so gilt auch $c \in f(X)$ für jedes $c \in [a, b]$.*

Beweis: Das Bild $f(X)$ ist zusammenhängend nach Satz 1.69, also ein Intervall. Daraus ergibt sich unmittelbar die Aussage. $\square$

1.4 Topologie im $\mathbb{R}^N$

In diesem Abschnitt werden wir die bisher eingeführten Begriffe auf den metrischen Raum $(\mathbb{R}^N, d)$ mit der Standardmetrik

$$d(x, y) := \|x - y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N$$

anwenden. Eine kanonische Wahl für die Norm $\|\cdot\|$ ist

$$\|x\| := \sqrt{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}, \quad \forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N.$$

Konvention: Wir bezeichnen Dimensionen von Vektorräumen ab jetzt stets mit Großbuchstaben $N, M, P, \ldots$ und wir schreiben Vektoren im $\mathbb{R}^N$ stets als Spaltenvektoren.

Der folgende Satz fasst einige Aussagen zusammen, die wir bereits bewiesen haben, oder die sich leicht aus den bereits bewiesenen Aussagen ergeben.

1.75 Satz: *Für jede Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^N$ gilt:*

(a) A ist als Teilraum von $\mathbb{R}^N$ genau dann vollständig, wenn A abgeschlossen ist.

(b) A ist genau dann kompakt, wenn A abgeschlossen und beschränkt ist.

(c) Ist A polygon-zusammenhängend, so ist A zusammenhängend.

(d) Ist A offen und zusammenhängend, so ist A polygon-zusammenhängend.

Beweis: Teil (b) ist Satz 1.64. Teil (c) und (d) sind Satz 1.72. Mit Satz 1.45 und Übungsaufgabe 1 auf Blatt 4 ist für (a) nur noch zu zeigen, dass der $\mathbb{R}^N$ mit $d(x, y) = \|x - y\|$ vollständig ist. Sei dazu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}^N$. Dann ist jede der Komponentenfolgen $(x_{n,i})_{n\in\mathbb{N}}$ mit $1 \leq i \leq N$ aufgrund der Ungleichung

$$|x_{n,i} - x_{m,i}| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{N} |x_{n,j} - x_{m,j}|^2} \leq \|x_n - x_m\|$$

eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$. Nach Beispiel 1.44 ist $\mathbb{R}$ vollständig. Also konvergiert jede Komponentenfolge. Sei $z_i = \lim_{n\to\infty} x_{n,i}$ für $i = 1, \ldots, N$. Wähle zu gegebenem $\varepsilon > 0$ Zahlen $n_i \in \mathbb{N}$ mit $|x_{n,i} - z_i| < \varepsilon/\sqrt{N}$ für alle $n \geq n_i$. Für $z := (z_1, \ldots, z_N)^\top$ und $n_{\max} := \max(n_1, \ldots, n_N)$ gilt dann

$$\|x_n - z\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} |x_{n,i} - z_i|^2} < \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \frac{\varepsilon^2}{N}} = \varepsilon.$$

Also konvergiert auch die Vektorfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, womit die Vollständigkeit von $(\mathbb{R}^N, d)$ bewiesen ist. □

Folgendes Lemma ist der Schlüssel für das Rechnen mit konvergenten Folgen, Grenzwerten und stetigen Funktionen mit Werten in $\mathbb{R}^N$. Der Beweis funktioniert genauso wie obiger Beweis für die Vollständigkeit von $(\mathbb{R}^N, d)$.

1.76 Lemma: *Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^N$ konvergiert genau dann, wenn jede ihrer Komponentenfolgen $(a_{n,i})_{n\in\mathbb{N}}$, $i = 1, \ldots, N$, konvergiert. Ist $a_i = \lim_{n\to\infty} a_{n,i}$ für $i = 1, \ldots, N$, so gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = (a_1, \ldots, a_N)^\top$.*

1.77 Satz: *Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen in $\mathbb{R}^N$. Dann konvergiert auch die Summenfolge $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit*

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Beweis: Rückführung auf Komponentenfolgen und Anwendung des Bekannten aus Analysis I. □

Wir wollen nun einen entsprechenden Satz für Produktfolgen beweisen. Wir kennen in mehrdimensionalen Räumen mindestens drei Arten von Produkten:

(1) Das Produkt komplexer Zahlen in $\mathbb{C}$ $(= \mathbb{R}^2)$.

(2) Das Produkt eines Vektors im $\mathbb{R}^N$ (oder $\mathbb{C}^N$) mit einem Skalar.

(3) Das Skalarprodukt von Vektoren im $\mathbb{R}^N$:

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i.$$

Um für jedes dieser Produkte einen Satz über Produktfolgen zu beweisen, verwenden wir folgendes Lemma.

1.78 Lemma: *Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge*[4] *und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge, so ist die Produktfolge $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (im Sinne jedes der drei obigen Fälle) eine Nullfolge.*

[4] Eine *Nullfolge* im $\mathbb{R}^N$ ist eine Folge, die gegen den Nullvektor konvergiert.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle $S > 0$ mit $\|b_n\| \leq S$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\|a_n\| < \varepsilon/S$ für alle $n \geq n_0$. Dann folgt $\|a_n \cdot b_n\| \leq \|a_n\| \cdot \|b_n\| < \frac{\varepsilon}{S} \cdot S = \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. Dabei haben wir die Cauchy-Schwarz-Ungleichung verwendet. $\square$

1.79 Satz: *Sind die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, so auch die Produktfolge $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (im Sinne jedes der drei obigen Fälle) und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Beweis: Seien $A = \lim_{x\to a} a_n$ und $B = \lim_{x\to a} b_n$. Dann schreiben wir

$$a_n \cdot b_n = A \cdot B + A \cdot (b_n - B) + (a_n - A) \cdot b_n.$$

Die beiden auf der rechten Seite auftretenden Folgen $(b_n - B)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_n - A)_{n\in\mathbb{N}}$ sind Nullfolgen und die konstante Folge $(A)_{n\in\mathbb{N}}$ sowie die konvergente Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind beschränkt. Unter Verwendung von Lemma 1.78 und Satz 1.77 folgt die Behauptung. $\square$

Bekannt aus Analysis I:

1.80 Satz: *Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $\mathbb{C}$ und gilt $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ sowie $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so konvergiert auch die Folge $(\frac{1}{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ mit*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} a_n}.$$

Aus obigen Sätzen lassen sich sofort analoge Resultate für das Rechnen mit Grenzwerten ableiten.

1.81 Satz: *Gegeben sei ein metrischer Raum (X, d), $D \subset X$ und zwei Funktionen $f, g : D \to \mathbb{R}^N$ sowie ein Häufungspunkt a von D. Existieren dann die Grenzwerte $\lim_{x\to a} f(x)$ und $\lim_{x\to a} g(x)$, so besitzt auch die Summenfunktion $f + g : D \to \mathbb{R}^N$[5] einen Grenzwert bei a und es gilt*

$$\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x).$$

1.82 Satz: *Gegeben sei ein metrischer Raum (X, d), eine Teilmenge $D \subset X$, Funktionen $f : D \to \mathbb{R}^N$, $g : D \to \mathbb{R}^M$, ein Euklidischer Raum $\mathbb{R}^P$ sowie ein Häufungspunkt a von D. Für jeden der drei Fälle*

(a) $N = M$, $P = 1$

(b) $N = 1$ und M beliebig, $P = M$

(c) $N = M = P = 2$ (wobei wir dann $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbb{C}$ identifizieren)

[5] Das ist die auf D definierte Funktion $x \mapsto f(x) + g(x)$.

gilt dann: Existieren die Grenzwerte $\lim_{x\to a} f(x)$ *und* $\lim_{x\to a} g(x)$*, so besitzt die Produktfunktion* $f \cdot g : D \to \mathbb{R}^p$ *einen Grenzwert bei* a *und es gilt*

$$\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x).$$

1.83 Satz: *Sei* D *eine Teilmenge eines metrischen Raums* (X,d)*,* $f : D \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$ *eine Funktion und* a *ein Häufungspunkt von* D*. Besitzt dann* f *bei* a *einen Grenzwert* $\lim_{x\to a} f(x) \neq 0$*, so gilt*

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lim_{x\to a} f(x)}.$$

Aus diesen Sätzen lassen sich unmittelbar Aussagen über das Rechnen mit stetigen Funktionen ableiten, z.B. ist die Summenfunktion zweier stetiger Funktionen wieder stetig. Die Formulierung und der Beweis dieser Sätze ist eine Übungsaufgabe.

2 Differentialrechnung im Mehrdimensionalen

In diesem Abschnitt wollen wir uns der Differentialrechnung im Mehrdimensionalen zuwenden. Wir beginnen mit der Definition der Ableitung für Funktionen zwischen Euklidischen Räumen. Neben der Euklidischen Norm im $\mathbb{R}^N$ werden wir an einigen Stellen eine Norm auf dem Vektorraum der $M \times N$-Matrizen $\mathbb{R}^{M\times N}$ benötigen. Diese definieren wir analog zur Euklidischen Norm durch

$$\|A\| := \sqrt{\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N} a_{ij}^2}, \quad \forall A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{M\times N}.$$

Dabei ist zu beachten, dass $\mathbb{R}^{M\times N}$ mit $\mathbb{R}^{M\cdot N}$ identifiziert werden kann (indem man z.B. die Spalten einer Matrix alle untereinander schreibt). Unter einer solchen Identifizierung ist $\|A\|$ nichts anderes als die Euklidische Norm im $\mathbb{R}^{M\cdot N}$.

Das folgende Lemma liefert die für uns wichtigsten Eigenschaften der Matrixnorm:

2.1 Lemma: *Sei* $A \in \mathbb{R}^{M\times N}$*. Dann gilt:*

(a) $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$ *für alle* $x \in \mathbb{R}^N$*.*

(b) $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ *für alle* $B \in \mathbb{R}^{N\times K}$*.*

Beweis: (a) Wir bezeichnen mit $a_1^\top, \ldots, a_M^\top$ die Zeilen von A. Mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung gilt dann

$$\|Ax\|^2 = \|(a_1^\top \cdot x, \ldots, a_M^\top \cdot x)\|^2 = \sum_{i=1}^{M}(a_i^\top \cdot x)^2$$

$$\leq \sum_{i=1}^{M} \|a_i\|^2 \cdot \|x\|^2 = \|A\|^2 \cdot \|x\|^2.$$

(b) Wir bezeichnen mit $b_1, \ldots, b_K$ die Spalten von B. Dann folgt wieder mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung, dass

$$\|AB\|^2 = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{K} (a_i^\top \cdot b_j)^2 \leq \sum_{i=1}^{M} \|a_i\|^2 \cdot \sum_{j=1}^{K} \|b_j\|^2 = \|A\|^2 \cdot \|B\|^2.$$

□

2.1 Der Ableitungsbegriff

Die Ableitung für Funktionen mit mehrdimensionalem Definitions- und Bildbereich ist wie folgt definiert.

2.2 Definition: *Seien $N, M \in \mathbb{N}$ und $D \subset \mathbb{R}^N$. Ferner sei $f : D \to \mathbb{R}^M$ eine Funktion und $a \in D^\circ$. Dann heißt f* **differenzierbar in a**, *falls eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{M \times N}$ existiert mit*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - A(x-a)}{\|x - a\|} = 0 \in \mathbb{R}^M.$$

Die Matrix A heißt in diesem Falle die **Ableitung** *oder* **Jacobi-Matrix** *von f in a und wir schreiben $\mathrm{D}f(a) = A$. Ist die Menge D offen und ist f in jedem Punkt $a \in D$ differenzierbar, so heißt f* **differenzierbar**.

2.3 Bemerkung: Wir definieren die Ableitung nur in inneren Punktes des Definitionsbereichs, weil wir so gewisse Komplikationen bei der Grenzwertbildung für mehrdimensionale Variablen vermeiden können. Man beachte, dass sich die Jacobi-Matrix im Fall $N = 1$ zu einem Spaltenvektor und im Fall $M = 1$ zu einem Zeilenvektor reduziert. Außerdem sei angemerkt, dass innere Punkte von Teilmengen des $\mathbb{R}^N$ stets Häufungspunkte sind. Deshalb können wir überhaupt Grenzwerte in solchen Punkten betrachten.

Das folgende Lemma zeigt, dass die Ableitung, sofern sie existiert, eindeutig ist.

2.4 Lemma: *Ist $f : D \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ in $a \in D^\circ$ differenzierbar, so ist die Jacobi-Matrix $\mathrm{D}f(a)$ eindeutig bestimmt.*

Beweis: Wir machen die Widerspruchsannahme, es gäbe $A, B \in \mathbb{R}^{M \times N}$ mit

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - A(x-a)}{\|x - a\|} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - B(x-a)}{\|x - a\|} = 0.$$

Dann konvergiert auch die Differenz dieser beiden Funktionen gegen 0, d.h.

$$\lim_{x\to a} \frac{(A-B)(x-a)}{\|x-a\|} = 0.$$

Insbesondere gilt für jeden Einheitsvektor[6] e_i, $i = 1, \ldots, N$, für $x = a + \delta e_i$ und $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ klein genug, dass

$$\left\| \frac{(A-B)\delta e_i}{\|\delta e_i\|} \right\| < \varepsilon.$$

Aufgrund der Homogenität von Normen kürzt sich δ und mit $\|e_i\| = 1$ folgt $\|(A-B)e_i\| < \varepsilon$. Da $(A-B)e_i$ gerade die i-te Spalte der Matrix $A-B$ ist und $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt $(A-B)e_i = 0$. Die i-te Spalte von $A-B$ ist also die Nullspalte. Da i auch beliebig war, ist damit $A = B$. $\square$

Anschaulich: Die Ableitung ist die (lokale) Linearisierung von f. Wenn der Begriff vernünftig definiert ist, sollte für lineare Funktionen keine Linearisierung notwendig sein, siehe folgendes Beispiel.

2.5 Beispiel: Sei $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ eine affine Funktion, also von der Form $f(x) = Ax + b$ mit $A \in \mathbb{R}^{M\times N}$ und $b \in \mathbb{R}^M$. Dann gilt für alle $x, a \in \mathbb{R}^N$, dass

$$f(x) - f(a) - A(x-a) = 0,$$

woraus unmittelbar folgt, dass f differenzierbar in jedem Punkt $a \in \mathbb{R}^N$ ist mit konstanter Ableitung $\mathrm{D}f(a) = A$. Wir können uns also merken: Ist eine Funktion affin, so müssen wir ihre Ableitung nicht berechnen! $\lozenge$

2.6 Beispiel: Wir betrachten den Spezialfall $N = M = 1$ und zeigen, dass sich der neu eingeführte Ableitungsbegriff auf den bereits aus Analysis I bekannten reduziert. Sei also $f : I \to \mathbb{R}$ mit einem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ eine Funktion, die in $a \in I$ differenzierbar im Sinne von Definition 2.2 ist. Dann reduziert sich die Matrix A zu einer Zahl $A \in \mathbb{R}$, für die gilt

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - A(x-a)}{|x-a|} = 0.$$

Da die Betragsfunktion $|\cdot|$ stetig ist, gilt dann auch

$$\left| \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - A(x-a)}{|x-a|} \right| = \lim_{x\to a} \left| \frac{f(x) - f(a) - A(x-a)}{x-a} \right| = 0.$$

Damit erhalten wir wiederum

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - A(x-a)}{x-a} + A = A.$$

$\lozenge$

[6] Zur Erinnerung: Die kanonischen Einheitsvektoren $e_1, \ldots, e_N$ im $\mathbb{R}^N$ sind diejenigen Vektoren, bei denen genau eine Komponente gleich 1 und alle anderen gleich 0 sind.

Folgende Charakterisierungen der Differenzierbarkeit sind oft sehr hilfreich.

2.7 Satz: *Sei $f : D \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ eine Funktion und $a \in D^\circ$. Dann sind äquivalent:*

(i) f ist in a differenzierbar mit Ableitung $\mathrm{D}f(a) = A$.

(ii) Es gibt eine in a stetige Funktion $r : D \to \mathbb{R}^M$ und für alle $x \in D$ gilt

$$f(x) = f(a) + \mathrm{D}f(a)(x-a) + r(x) \quad \textit{und} \quad \lim_{x\to a} \frac{r(x)}{\|x-a\|} = 0. \tag{9}$$

(iii) Es gibt eine in a stetige Funktion $R : D \to \mathbb{R}^{M\times N}$ und für alle $x \in D$ gilt

$$f(x) = f(a) + A \cdot (x-a) + R(x) \cdot (x-a) \quad \textit{und} \quad \lim_{x\to a} R(x) = 0.$$

(iv) Es gibt eine in a stetige Funktion $Q : D \to \mathbb{R}^{M\times N}$ und für alle $x \in D$ gilt

$$f(x) = f(a) + Q(x) \cdot (x-a) \quad \textit{und} \quad \lim_{x\to a} Q(x) = A.$$

Beweis: Die Äquivalenz von (i) und (ii) folgt sofort mit $r(x) := f(x) - f(a) - \mathrm{D}f(a)(x-a)$ aus der Definition der Ableitung. Da aus der Existenz der Ableitung $\mathrm{D}f(a)$ folgt, dass $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, ist r bei a stetig. Der Satz ist bewiesen, wenn wir die Implikationen (ii) $\Rightarrow$ (iii), (iii) $\Rightarrow$ (iv) und (iv) $\Rightarrow$ (ii) bewiesen haben.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Wir definieren R durch $R(a) := 0$ und

$$R(x) := \frac{r(x)}{\|x-a\|^2} \cdot (x-a)^\top \quad \text{für alle } x \in D\backslash\{a\}.$$

Dann gilt für alle $x \in D\backslash\{a\}$

$$R(x) \cdot (x-a) = \frac{r(x)}{\|x-a\|^2} \cdot (x-a)^\top \cdot (x-a) = r(x).$$

Diese Beziehung gilt auch für $x = a$, denn $r(a) = 0$. Daher gilt

$$\lim_{x\to a} R(x) = \lim_{x\to a} \frac{r(x)}{\|x-a\|} \cdot \frac{(x-a)^\top}{\|x-a\|} = 0.$$

(iii) $\Rightarrow$ (iv): Man muss nur $Q(x) := A + R(x)$ setzen.

(iv) $\Rightarrow$ (ii): Wir definieren $r(x) := (Q(x) - A) \cdot (x-a)$. Dann gilt

$$\lim_{x\to a} \frac{r(x)}{\|x-a\|} = \lim_{x\to a} (Q(x) - A) \cdot \frac{x-a}{\|x-a\|} = 0.$$

$\square$

2.8 Bemerkung: Die Beziehung (9) zeigt, dass man eine in a differenzierbare Funktion als Summe einer affinen Funktion und einer Funktion schreiben kann, die stärker als linear gegen 0 konvergiert, wenn $x \to a$.

Als nächstes wollen wir einen Zusammenhang zwischen Differenzierbarkeit und Stetigkeit herstellen:

2.9 Satz: *Ist $f : D \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ in $a \in D^\circ$ differenzierbar, so ist f in a stetig.*

Beweis: Dies folgt sofort aus der Darstellung $f(x) = f(a) + Q(x) \cdot (x - a)$ in Satz 2.7(iv) und den Rechenregeln für stetige Funktionen. $\square$

Umgekehrt muss eine stetige Funktion allerdings nicht differenzierbar sein. Das haben wir bereits in Analysis I gesehen.

Die bekannten Rechenregeln für Ableitungen übertragen sich auf Ableitungen im Mehrdimensionalen wie folgt. Bei den dabei auftretenden Produkten ist ganz besonders die Reihenfolge der Faktoren zu beachten, da die Matrizenmultiplikation nicht kommutativ ist!

2.10 Satz: *Gegeben sei eine Menge $D \subset \mathbb{R}^N$, $a \in D^\circ$ und Funktionen $f, g : D \to \mathbb{R}^M$, $h : D \to \mathbb{R}$. Sind diese in a differenzierbar, so sind auch $f + g : D \to \mathbb{R}^M$, $h \cdot g : D \to \mathbb{R}^M$, $f \cdot g : D \to \mathbb{R}$ (Skalarprodukt) sowie $\frac{1}{h} : \{x \in D : h(x) \neq 0\} \to \mathbb{R}$ und $\frac{g}{h} : \{x \in D : h(x) \neq 0\} \to \mathbb{R}^M$ in a differenzierbar (sofern sie in einer Umgebung von a definiert sind) und es gilt:*

(a) $\mathrm{D}(f + g)(a) = \mathrm{D}f(a) + \mathrm{D}g(a) \in \mathbb{R}^{M \times N}$.

(b) $\mathrm{D}(h \cdot g)(a) = h(a) \cdot \mathrm{D}g(a) + g(a) \cdot \mathrm{D}h(a) \in \mathbb{R}^{M \times N}$.

(c) $\mathrm{D}(f \cdot g)(a) = f(a)^\top \cdot \mathrm{D}g(a) + g(a)^\top \cdot \mathrm{D}f(a) \in \mathbb{R}^{1 \times N}$.

(d) $\mathrm{D}(\frac{1}{h})(a) = -\frac{1}{h(a)^2}\mathrm{D}h(a) \in \mathbb{R}^{1 \times N}$.

(e) $\mathrm{D}(\frac{g}{h})(a) = \frac{1}{h(a)^2}\,[h(a) \cdot \mathrm{D}g(a) - g(a) \cdot \mathrm{D}h(a)] \in \mathbb{R}^{M \times N}$.

Beweis: Mit Hilfe von Satz 2.7(iv) schreiben wir

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(a) + Q(x) \cdot (x - a) \quad \text{mit } \lim_{x \to a} Q(x) = \mathrm{D}f(a) \in \mathbb{R}^{M \times N},\\
g(x) &= g(a) + S(x) \cdot (x - a) \quad \text{mit } \lim_{x \to a} S(x) = \mathrm{D}g(a) \in \mathbb{R}^{M \times N},\\
h(x) &= h(a) + T(x) \cdot (x - a) \quad \text{mit } \lim_{x \to a} T(x) = \mathrm{D}h(a) \in \mathbb{R}^{1 \times N}.
\end{aligned}$$

(a) Es gilt $f(x) + g(x) = f(a) + g(a) + [Q(x) + S(x)] \cdot (x - a)$ mit $\lim_{x \to a}(Q(x) + S(x)) = \mathrm{D}f(a) + \mathrm{D}g(a)$.

(b) Es gilt

$$h(x) \cdot g(x) = h(a)g(a) + [h(a)S(x) + g(a)T(x) + T(x)(x - a)S(x)](x - a)$$

$$\lim_{x\to a}[h(a)S(x)+g(a)T(x)+T(x)(x-a)S(x)] = h(a)\mathrm{D}g(a)+g(a)\mathrm{D}h(a).$$

(c) Dies ist formal die gleiche Rechnung wie in (b).

(d) Ähnliche Rechnung wie oben.

(e) Dies ergibt sich aus (b), wenn man dort h durch $\frac{1}{h}$ ersetzt und dann (d) anwendet. □

Auch die Kettenregel überträgt sich in natürlicher Weise auf mehrdimensionale Ableitungen.

2.11 Satz: *Seien $f : D \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ und $g : E \subset \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^K$. Ferner sei f differenzierbar in $a \in D^\circ$, es gelte $f(a) \in E^\circ$ und g sei differenzierbar in $f(a)$. Dann ist a ein innerer Punkt des Definitionsbereichs von $g \circ f$ und $g \circ f$ ist in a differenzierbar mit*

$$\mathrm{D}(g\circ f)(a) = \mathrm{D}g(f(a)) \cdot \mathrm{D}f(a) \in \mathbb{R}^{K\times N}.$$

Beweis: Da $f(a) \in E^\circ$, existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $B(f(a),\varepsilon) \subset E$. Da f in a differenzierbar ist, ist f nach Satz 2.9 in a auch stetig. Also existiert ein $\delta > 0$, so dass $f(B(a,\delta)) \subset B(f(a),\varepsilon)$. Folglich ist $g(f(x))$ für alle $x \in B(a,\delta)$ definiert und damit a ein innerer Punkt des Definitionsbereichs von $g\circ f$. Unter Verwendung von Satz 2.7(iv) schreiben wir

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(a) + Q(x)(x-a) \quad \text{mit } \lim_{x\to a} Q(x) = \mathrm{D}f(a),\\
g(y) &= g(f(a)) + S(y)(y-f(a)) \quad \text{mit } \lim_{y\to f(a)} S(y) = \mathrm{D}g(f(a)).
\end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
(g\circ f)(x) = g(f(x)) &= g(f(a)) + S(f(x))(f(x)-f(a))\\
&= g(f(a)) + S(f(x))Q(x)(x-a).
\end{aligned}$$

Es gilt $\lim_{x\to a} S(f(x))Q(x) = \mathrm{D}g(f(a))\cdot \mathrm{D}g(a)$ wegen der Stetigkeit von Q in a und von S in $f(a)$. Mit Satz 2.7 folgt die Behauptung. □

Ist eine Funktion auf dem gesamten Definitionsbereich differenzierbar, so können wir ihre Ableitung als eigenständige Funktion betrachten.

2.12 Definition: *Ist $D \subset \mathbb{R}^N$ offen und $f : D \to \mathbb{R}^M$ eine differenzierbare Funktion, dann heißt die Funktion $\mathrm{D}f : D \to \mathbb{R}^{M\times N}$, $a \mapsto \mathrm{D}f(a)$, die* **Ableitung** *von f. Ist diese Funktion stetig, so heißt f* **stetig differenzierbar** *oder* **$\mathbf{C}^1$-Funktion**. *Mit $C^1(D,\mathbb{R}^M)$ bezeichnen wir die Menge aller stetig differenzierbaren Funktionen von D nach $\mathbb{R}^M$.*

Erinnerung: Es gibt differenzierbare Funktionen, deren Ableitung nicht stetig ist (Analysis I).

Ist der Definitionsbereich D von f nicht offen, so macht es manchmal trotzdem Sinn von der Differenzierbarkeit von f zu sprechen. Dazu folgende Vereinbarung: Unter einer **$\mathbf{C^1}$-Funktion** $f : D \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ verstehen wir eine Funktion, die die Einschränkung einer auf einer offenen Obermenge $\tilde{D} \supset D$ definierten C^1-Funktion $\tilde{f}$ ist. Für alle $a \in D$ setzen wir dann $\mathrm{D}f(a) := \mathrm{D}\tilde{f}(a)$.

2.2 Partielle Ableitungen

Wir wollen herausfinden, wie man Ableitungen konkret berechnen kann. Dazu führen wir den Begriff der *Richtungsableitung* und der *partiellen Ableitung* ein.

2.13 Definition: *Sei $f : D \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ eine Funktion und $a \in D^\circ$. Ferner sei $v \in \mathbb{R}^N$ mit $v \neq 0$. Falls der Grenzwert*

$$\partial_v f(a) := \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}$$

existiert, so nennen wir ihn die **Richtungsableitung** *von f im Punkt a in Richtung v. Ist speziell $v = e_i$ der i-te kanonische Einheitsvektor, so nennen wir $\partial_{e_i} f(a)$ die* **partielle Ableitung** *von f nach der i-ten Koordinate im Punkt a und verwenden dafür auch die Notation $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ oder $\partial_i f(a)$.*

Beachte: Zur Berechnung der Richtungsableitung in Richtung v müssen wie die Funktion

$$h(t) := f(a+tv), \quad h :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}^M$$

an der Stelle $t = 0$ ableiten, wobei $\varepsilon > 0$ klein genug gewählt ist, dass $a + tv \in D$ für alle $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$. Im Fall $v = e_i$ ist dies die Funktion

$$h(t) := f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, \ldots, a_N).$$

Wir können diese Ableitungen komponentenweise berechnen. Wie dies konkret funktioniert, wissen wir aus der Analysis I.

Im Allgemeinen bezeichnen wir mit

$$f_1, \ldots, f_M : D \to \mathbb{R}$$

die Komponentenfunktionen von $f : D \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$, so dass $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_M(x))^T$.

2.14 Beispiel: Wir berechnen für

$$f(x,y) := \frac{y^2}{x}, \quad f : D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\} \to \mathbb{R}$$

in jedem Punkt $(a,b) \in D$ die beiden partiellen Ableitungen:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} \frac{b^2}{a+t} = b^2 \frac{-1}{a^2} = -\left(\frac{b}{a}\right)^2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} \frac{(b+t)^2}{a} = 2\frac{b}{a}.$$

$\Diamond$

Das folgende Beispiel zeigt, dass die Existenz aller Richtungsableitungen in einem Punkt a noch nicht die Differenzierbarkeit in a impliziert.

2.15 Beispiel: Wir betrachten die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$g(x,y) := \begin{cases} \frac{y^2}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}.$$

Sei $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$ mit $\xi \neq 0$. Dann gilt

$$\partial_{(\xi,\eta)} g(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{(t\eta)^2}{t\xi}}{t} = \frac{\eta^2}{\xi}.$$

Für $(0,\eta) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\partial_{(\xi,\eta)} g(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0.$$

Es existieren also alle Richtungsableitungen in $(0,0)$. Trotzdem ist g in $(0,0)$ nicht differenzierbar, in der Tat nicht einmal stetig, denn

$$\lim_{x\to 0^+} g(x, \sqrt{x}) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1 \neq 0 = g(0,0).$$

$\Diamond$

Umgekehrt impliziert aber die Differenzierbarkeit die Existenz aller Richtungsableitungen:

2.16 Satz: *Ist $f : D \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ im Punkt $a \in D^\circ$ differenzierbar, so existiert für jedes $0 \neq v \in \mathbb{R}^N$ die Richtungsableitung $\partial_v f(a)$ und ist gegeben durch*

$$\partial_v f(a) = \mathrm{D}f(a)v.$$

Beweis: Nach Satz 2.7(iv) gilt $f(a+tv) = f(a) + Q(a+tv)\cdot tv$ mit $\lim_{t\to 0} Q(a+tv) = \mathrm{D}f(a)$. Daraus folgt

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} = \lim_{t\to 0} Q(a+tv)v = \mathrm{D}f(a)v.$$

$\square$

2.17 Definition: *Ist f eine reellwertige Funktion, also $f : D \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, und existieren in einem Punkt $a \in D^\circ$ alle partiellen Ableitungen, so nennen wir den Zeilenvektor*

$$\mathrm{grad} f(a) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_N}(a) \right),$$

dessen Komponenten die partiellen Ableitungen von f in a sind, den **Gradienten** *von f an der Stelle a.*

2.18 Korollar: *Ist $f : D \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ in $a \in D^\circ$ differenzierbar, so gilt*

$$\mathrm{D}f(a) = \mathrm{grad} f(a).$$

Beweis: Nach Satz 2.16 gilt

$$\mathrm{D}f(a)e_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a), \quad i = 1, \ldots, N.$$

Da $\mathrm{D}f(a)e_i$ die i-te Komponente des Zeilenvektors $\mathrm{D}f(a) \in \mathbb{R}^{1\times N}$ ist, ist $\mathrm{D}f(a) = \mathrm{grad} f(a)$. $\square$

Der folgende Satz macht die geometrische Bedeutung des Gradienten als „Richtung des steilsten Anstiegs“ deutlich.

2.19 Satz: *Sei $f : D \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ in $a \in D^\circ$ differenzierbar mit $\mathrm{grad} f(a) \neq 0$. Für den normierten Vektor*

$$v_0 := \frac{\mathrm{grad} f(a)^\top}{\|\mathrm{grad} f(a)\|}$$

gilt dann

$$\partial_{v_0} f(a) = \max\{\partial_v f(a) \in \mathbb{R} : v \in \mathbb{R}^N \text{ mit } \|v\| = 1\} = \|\mathrm{grad} f(a)\|.$$

Beweis: Sei $\|v\| = 1$. Dann gilt mit Satz 2.16 und Korollar 2.18 sowie der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung, dass

$$\begin{aligned}
\partial_v f(a) &= \mathrm{grad} f(a) \cdot v = \|\mathrm{grad} f(a)\| v_0^T \cdot v \leq \|\mathrm{grad} f(a)\| \\
&= \mathrm{grad} f(a) \cdot \frac{(\mathrm{grad} f(a))^\top}{\|\mathrm{grad} f(a)\|} = \mathrm{grad} f(a) \cdot v_0 = \partial_{v_0} f(a).
\end{aligned}$$

Damit sind alle Aussagen bewiesen. $\square$

Wir schließen diesen Unterabschnitt mit einer Formel für die Jacobi-Matrix ab. Wir haben gesehen, dass

$$\mathrm{D}f(a) \cdot e_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).$$

Die i-te Spalte der Jacobi-Matrix $\mathrm{D}f(a)$ ist also gerade die i-te partielle Ableitung von f im Punkt a, die sich komponentenweise berechnen lässt. Schreiben wir $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_M(x)$, so gilt also

$$\mathrm{D}f(a) = \begin{pmatrix} \mathrm{grad} f_1(a) \\ \vdots \\ \mathrm{grad} f_M(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_N}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_M}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_M}{\partial x_N}(a) \end{pmatrix}.$$

Man sollte sich merken: Die Zeilen der Jacobi-Matrix sind die Gradienten der Komponentenfunktionen. Die Spalten der Jacobi-Matrix sind die partiellen Ableitungen. Oder einfach: $\mathrm{D}f(a) = (\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a))_{i,j}$.

2.3 Der Mittelwertsatz und seine Anwendungen

Bei vielen Resultaten der Differentialrechnung können wir uns auf die Betrachtung von Funktionen mit Werten in $\mathbb{R}$ beschränken. Entsprechende Resultate für vektorwertige Funktionen erhält man dann einfach, indem man eine solche Funktion komponentenweise betrachtet.

Aus der Analysis I kennen wir den Mittelwertsatz der eindimensionalen Differentialrechnung: Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die auf $]a,b[$ differenzierbar ist, so existiert ein $\xi \in]a,b[$ mit

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi).$$

Eine für die mehrdimensionale Differentialrechnung wichtige Anwendung dieses Satzes ist das folgende Resultat.

2.20 Satz: *Gegeben sei eine Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ und $a \in D^\circ$. Existieren dann die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$, $i = 1,\dots,N$, für alle x aus einer Umgebung $U \subset D$ von a, und sind diese in a stetig, so ist f in a differenzierbar mit $\mathrm{D}f(a) = \mathrm{grad} f(a)$.*

Beweis: Wir zeigen die Differenzierbarkeit von f in a, indem wir $f(x)-f(a)$ als $Q(x)(x-a)$ mit einer in a stetigen Funktion Q darstellen (siehe Satz 2.7(iv)). Wir wählen zunächst $\varepsilon > 0$ so klein, dass $B(a,\varepsilon) \subset U$. Für jedes $x \in B(a,\varepsilon)$ definieren wir $\alpha_i := \alpha_i(x) \in B(a,\varepsilon)$ durch

$$\alpha_0 := a, \quad \alpha_i := (x_1,\dots,x_i,a_{i+1},\dots,a_N), \quad i = 1,\dots,N-1, \quad \alpha_N := x.$$

Dann gilt

$$\|\alpha_i - a\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{i}(x_j-a_j)^2} \le \sqrt{\sum_{j=1}^{N}(x_j-a_j)^2} = \|x-a\| < \varepsilon.$$

Also gilt $\alpha_0,\dots,\alpha_N \in B(a,\varepsilon)$. Die Punkte α_{i-1} und α_i höchstens in der i-ten Koordinate, genauer:

$$\alpha_i - \alpha_{i-1} = (0,\dots,0,x_i-a_i,0,\dots,0) = (x_i-a_i)e_i, \quad i = 1,\dots,N.$$

Zum anderen gilt

$$\lim_{x\to a} \alpha_i(x) = a, \quad i = 1,\dots,N. \tag{10}$$

Für jedes $i = 1,\dots,N$ erfüllt die Funktion $\tilde{f}_i : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$\tilde{f}_i(t) := f(\alpha_{i-1} + t(\alpha_i - \alpha_{i-1})) = f(x_1,\dots,x_{i-1},a_i + t(x_i-a_i),a_{i+1},\dots,a_N),$$

die Voraussetzungen des Mittelwertsatzes. Begründung: Für jedes $t_0 \in [0,1]$ gilt

$$\lim_{t\to t_0} \frac{\tilde{f}_i(t)-\tilde{f}_i(t_0)}{t-t_0} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,\dots,x_{i-1},a_i+t_0(x_i-a_i),a_{i+1},\dots,a_N)(x_i-a_i).$$

Also ist $\tilde{f}_i$ überall differenzierbar und damit auch stetig. Der Mittelwertsatz liefert ein $\tau_i = \tau_i(x) \in]0,1[$ mit

$$\begin{aligned} f(\alpha_i) - f(\alpha_{i-1}) = \tilde{f}_i(1) - \tilde{f}_i(0) &= \tilde{f}_i'(\tau_i) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_i}(\alpha_{i-1} + \tau_i(\alpha_i - \alpha_{i-1}))(x_i - a_i). \end{aligned}$$

Nun schreiben wir (Teleskopsumme!)

$$f(x) - f(a) = \sum_{i=1}^{N} [f(\alpha_i) - f(\alpha_{i-1})] = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\alpha_{i-1} + \tau_i(\alpha_i - \alpha_{i-1}))(x_i - a_i).$$

Die Summe auf der rechten Seite können wir als Skalarprodukt auffassen. Definieren wir

$$Q(x) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\alpha_0 + \tau_1(\alpha_1 - \alpha_0)), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_N}(\alpha_{N-1} + \tau_N(\alpha_N - \alpha_{N-1})) \right),$$

so erhalten wir die gesuchte Darstellung $f(x) - f(a) = Q(x)(x - a)$. Aus (10) folgt $\lim_{x \to a}(\alpha_{i-1}(x) + \tau_i(x)(\alpha_i(x) - \alpha_{i-1}(x))) = a$ für $i = 1, \ldots, N$. Zusammen mit der vorausgesetzten Stetigkeit der partiellen Ableitungen im Punkt a folgt die Stetigkeit von Q in a. $\square$

Der folgende Satz verallgemeinert den eindimensionalen Mittelwertsatz auf Funktionen mit mehrdimensionalem Definitionsbereich.

2.21 Satz: *Gegeben sei eine differenzierbare Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$. Dabei sei D offen und $a, b \in D$ seien so gewählt, dass $\mathrm{Str}[a,b] \subset D$. Dann gibt es ein $\xi \in \mathrm{Str}[a,b]$ mit*

$$f(b) - f(a) = \mathrm{grad} f(\xi) \cdot (b - a).$$

Beweis: Wir betrachten die Hilfsfunktion

$$h(t) := f(a + t(b - a)), \quad h : [0,1] \to \mathbb{R}.$$

Diese Funktion ist als Komposition stetiger Funktionen stetig und nach der Kettenregel differenzierbar in $]0,1[$ mit Ableitung $h'(t) = \mathrm{grad} f(a + t(b - a)) \cdot (b - a)$. Nach dem eindimensionalen Mittelwertsatz gilt $h'(\tau) = h(1) - h(0)$ für ein $\tau \in]0,1[$. Mit $\xi := a + \tau(b - a)$ folgt die Behauptung. $\square$

Eine Anwendung liefert der folgende Satz:

2.22 Satz: *Sei $D \subset \mathbb{R}^N$ offen und $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Gilt dann $\mathrm{grad} f(x) = 0$ für alle $x \in D$, so ist f auf jeder Zusammenhangskomponente von D konstant.*

Beweis: Sei $G \subset D$ eine Zusammenhangskomponente von D. Diese ist offen, da mit jedem $x \in G$ auch ein Ball der Form $B(x,r)$ zu D und damit zu G

gehört (da er zusammenhängend ist). Wähle nun $a, b \in G$ beliebig. Dann gibt es nach Satz 1.72 Punkte $a_0, \ldots, a_n \in G$ mit $a_0 = a$ und $a_n = b$, so dass $\mathrm{Str}[a_{i-1}, a_i] \subset G$ für $i = 1, \ldots, n$. Nach Satz 2.21 gibt es $\xi \in \mathrm{Str}[a, a_1]$ mit $f(a_1) - f(a) = \mathrm{grad} f(\xi) \cdot (a_1 - a)$. Da $\mathrm{grad} f(\xi) = 0$ nach Voraussetzung, folgt $f(a_1) = f(a)$. In dieser Weise schließt man weiter auf $f(a) = f(a_1) = f(a_2) = \cdots = f(a_{n-1}) = f(b)$. □

Dass sich der Mittelwertsatz i.A. nicht auf Funktionen mit mehrdimensionalem Bildbereich übertragen lässt, zeigt folgendes Beispiel.

2.23 Beispiel: Betrachte

$$f(x) := \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix}, \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2.$$

Nehmen wir an, dass $f(2\pi) - f(0) = \mathrm{D}f(\xi)(2\pi - 0)$ für ein $\xi \in [0, 2\pi]$, so würde dies bedeuten, dass

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\pi \sin \xi \\ 2\pi \cos \xi \end{pmatrix}.$$

Da die Sinus- und die Kosinusfunktion keine gemeinsame Nullstelle haben, kann dies nicht der Fall sein. ◊

Der Mittelwertsatz lässt sich jedoch zumindest in Form einer Abschätzung auf Funktionen mit mehrdimensionalem Bildbereich übertragen. Der folgende Satz wird manchmal auch *Schrankensatz* genannt.

2.24 Satz: *Sei $D \subset \mathbb{R}^N$ offen und $f : D \to \mathbb{R}^M$ differenzierbar. Ferner seien $a, b \in D$, so dass $\mathrm{Str}[a, b] \subset D$. Dann gibt es ein $\xi \in \mathrm{Str}[a, b]$ mit*

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \|\mathrm{D}f(\xi)\| \cdot \|b - a\|.$$

Beweis: Die Hilfsfunktion

$$h(x) := f(x)^\top \cdot (f(b) - f(a)), \quad h : D \to \mathbb{R}$$

erfüllt die Voraussetzungen von Satz 2.21. Also existiert $\xi \in \mathrm{Str}[a, b]$ mit $h(b) - h(a) = \mathrm{grad} h(\xi) \cdot (b - a)$. Mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt hieraus

$$|h(b) - h(a)| \leq \|\mathrm{grad} f(\xi)\| \cdot \|b - a\|.$$

Daraus folgt wiederum mit Hilfe der Rechenregel für Ableitungen von Produkten

$$\begin{aligned} \|f(b) - f(a)\|^2 &= (f(b) - f(a))^\top \cdot (f(b) - f(a)) = h(b) - h(a) \\ &\leq \|\mathrm{grad} h(\xi)\| \cdot \|b - a\| = \|\mathrm{D}f(\xi)^\top \cdot (f(b) - f(a))\| \cdot \|b - a\| \\ &\leq \|\mathrm{D}f(\xi)\| \cdot \|f(b) - f(a)\| \cdot \|b - a\|. \end{aligned}$$

Dabei haben wir verwendet, dass die Transposition die Norm einer Matrix nicht ändert. Den trivialen Fall $f(a) = f(b)$ können wir außer acht lassen. Deshalb folgt nach Division durch $\|f(b) - f(a)\|$ die Behauptung. □

2.4 Der Umkehrsatz

Nun wollen wir herausfinden, wann eine differenzierbare Funktion eine differenzierbare Umkehrfunktion besitzt. Im Falle einer affinen Funktion

$$f(x) = Ax + b$$

ist das sehr einfach. Die Invertierbarkeit der Matrix A ist äquivalent zur Existenz (und Differenzierbarkeit) einer Umkehrfunktion, die dann durch

$$f^{-1}(y) = A^{-1}(y - b)$$

gegeben ist. Es ist nun naheliegend anzunehmen, dass bei einer differenzierbaren Funktion f die Invertierbarkeit der Jacobi-Matrix $\mathrm{D}f(a)$ in einem Punkt a zumindest lokal die Umkehrbarkeit von f impliziert. Das folgende Beispiel zeigt, dass jedoch die Invertierbarkeit der Ableitung alleine noch nicht ausreicht, um die Existenz einer Umkehrfunktion zu garantieren.

2.25 Beispiel: Wir betrachten die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} x + x^2 \cos\frac{\pi}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}, \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Diese ist in $x = 0$ differenzierbar mit Ableitung 1, da

$$\lim_{x\to 0} \frac{x + x^2 \cos\frac{\pi}{x}}{x} = \lim_{x\to 0} \left(1 + x \cos\frac{\pi}{x}\right) = 1.$$

Als 1×1-Matrix ist $f'(0)$ also invertierbar. Dennoch ist f in keiner Umgebung von 0 umkehrbar, denn die Ableitung

$$f'(x) = 1 + 2x \cos\frac{\pi}{x} + \pi \sin\frac{\pi}{x}$$

wechselt in jeder Umgebung von 0 unendlich oft das Vorzeichen. $\Diamond$

Was in obigem Beispiel die lokale Umkehrbarkeit von f verhindert ist, dass f' bei $x = 0$ nicht stetig ist. Wir werden nun den Umkehrsatz beweisen, der zeigt, dass bei stetiger Differenzierbarkeit die Invertierbarkeit der Ableitung hinreichend für die Existenz einer lokalen Umkehrfunktion ist.

Vorher führen wir noch die Bezeichnung **Diffeomorphismus** für eine bijektive C^1-Funktion mit C^1-Umkehrfunktion zwischen zwei offenen Teilmengen eines Euklidischen Raums $\mathbb{R}^n$ ein. Außerdem beweisen wir folgendes Hilfsresultat.[7]

2.26 Lemma: *Es gilt:*

[7] Zur Erinnerung: Mit $\mathrm{Gl}(N, \mathbb{R})$ bezeichnet man die Menge aller invertierbaren reellen $N \times N$-Matrizen.

(a) *Ist* $A \in \mathrm{Gl}(N,\mathbb{R})$ *und* $B \in \mathbb{R}^{N\times N}$ *mit* $\|A-B\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$, *so gilt* $B \in \mathrm{Gl}(N,\mathbb{R})$.

(b) $\mathrm{Gl}(N,\mathbb{R})$ *ist offen in* $\mathbb{R}^{N\times N}$.

(c) *Die Funktion* $h(A) := A^{-1}$, $h : \mathrm{Gl}(N,\mathbb{R}) \to \mathrm{Gl}(N,\mathbb{R})$, *ist stetig.*

Beweis: (a) Seien $\alpha := \frac{1}{\|A^{-1}\|}$ und $\beta := \|A-B\|$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}^N$:

$$\begin{aligned}\alpha\|x\| &= \alpha\|A^{-1}Ax\| \le \alpha\|A^{-1}\|\|Ax\| = \|Ax\| = \|(A-B)x + Bx\| \\ &\le \|(A-B)x\| + \|Bx\| \le \|A-B\|\cdot\|x\| + \|Bx\| = \beta\|x\| + \|Bx\|.\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$(\alpha-\beta)\|x\| \le \|Bx\| \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^N.$$

Für alle $x \neq 0$ gilt dann wegen $\beta < \alpha$ (Voraussetzung), dass $\|Bx\| > 0$ und damit $Bx \neq 0$. Also ist der Kern von B trivial und B folglich invertierbar.

(b) folgt unmittelbar aus (a).

(c) Dies folgt unmittelbar aus den für die Matrixinversion bekannten Formeln aus der Linearen Algebra und den Rechenregeln für stetige Funktionen. □

2.27 Satz: *Sei* $D \subset \mathbb{R}^N$ *offen und* $f : D \to \mathbb{R}^N$ *eine* C^1*-Funktion, so dass* $\mathrm{D}f(a)$ *für ein* $a \in D$ *invertierbar ist. Dann gibt es eine offene Umgebung* $U \subset D$ *von* a*, so dass die Einschränkung* $f|_U : U \to f(U)$ *ein Diffeomorphismus ist. Außerdem ist* $f(U)$ *offen und es gilt*

$$\mathrm{D}f^{-1}(y) = [\mathrm{D}f(f^{-1}(y))]^{-1} \quad \textit{für alle } y \in f(U).$$

Beweis: Um den Beweis übersichtlicher zu machen, unterteilen wir ihn in vier Schritte.

<u>*Schritt 1*</u> (Existenz von U und Injektivität von $f|_U$): Es reicht aus, eine Umgebung U von a so zu bestimmen, dass für jedes $y \in \mathbb{R}^N$ die Hilfsfunktion

$$h_y(x) := x + \mathrm{D}f(a)^{-1}\cdot(y - f(x)), \quad h_y : U \to \mathbb{R}^N$$

höchstens einen Fixpunkt x^* besitzt, denn dann gibt es höchstens ein $x^* \in U$ mit $y = f(x^*)$, also höchstens ein Urbild von y unter f in U. Nach Voraussetzung ist $\mathrm{D}f : D \to \mathbb{R}^{N\times N}$ bei a stetig. Also existiert ein $\delta > 0$ mit

$$\|\mathrm{D}f(x) - \mathrm{D}f(a)\| < \frac{1}{2\|\mathrm{D}f(a)^{-1}\|} \quad \text{für alle } x \in U := B(a,\delta) \subset D. \tag{11}$$

Für jedes $y \in \mathbb{R}^N$ gilt $\mathrm{D}h_y(x) = I - \mathrm{D}f(a)^{-1}\mathrm{D}f(x) = \mathrm{D}f(a)^{-1}(\mathrm{D}f(a) - \mathrm{D}f(x))$. Es folgt

$$\|\mathrm{D}h_y(x)\| \le \|\mathrm{D}f(a)^{-1}\|\cdot\|\mathrm{D}f(a) - \mathrm{D}f(x)\| < \frac{1}{2} \quad \text{für alle } x \in U.$$

Mit Satz 2.24 (Schrankensatz) gilt dann (da U konvex ist)

$$\|h_y(x_1) - h_y(x_2)\| \leq \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\| \quad \text{für alle } x_1, x_2 \in U. \tag{12}$$

Die Annahme der Existenz zweier Fixpunkte x_1^*, x_2^* von h_y in U liefert dann den Widerspruch $\|x_1^* - x_2^*\| = \|h_y(x_1^*) - h_y(x_2^*)\| \leq \frac{1}{2}\|x_1^* - x_2^*\|$.

<u>*Schritt 2*</u> (Offenheit von $f(U)$): Wir wählen ein beliebiges $\tilde{y} \in f(U)$. Sei $\tilde{y} = f(\tilde{x})$, $\tilde{x} \in U$. Dann gilt $B(\tilde{x}, \eta) \subset U$ für ein $\eta > 0$, da U offen ist. Wir definieren

$$\rho := \frac{\eta}{2\|\mathrm{D}f(a)^{-1}\|}$$

und zeigen, dass $B(y^*, \rho) \subset f(U)$. Dazu sei $y^* \in B(\tilde{y}, \rho)$ beliebig. Um die Existenz von $x^* \in U$ mit $y^* = f(x^*)$ zu zeigen, wenden wir den Banachschen Fixpunktsatz (Satz 1.46) an. Dazu müssen wir dessen Voraussetzungen verifizieren. Als kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^N$ ist $\overline{B(\tilde{x}, \eta)}$ nach Satz 1.58 ein vollständiger metrischer Raum. Die Funktion h_{y^*} bildet $\overline{B(\tilde{x}, \eta)}$ in sich ab, denn für alle $x \in \overline{B(\tilde{x}, \eta)}$ gilt

$$\begin{aligned}
\|h_{y^*}(x) - \tilde{x}\| &\leq \|h_{y^*}(x) - h_{y^*}(\tilde{x})\| + \|h_{y^*}(\tilde{x}) - \tilde{x}\| \\
&\leq \|h_{y^*}(x) - h_{y^*}(\tilde{x})\| + \|\mathrm{D}f(a)^{-1}\| \cdot \underbrace{\|y^* - f(\tilde{x})\|}_{<\rho} \\
&< \frac{1}{2}\|x - \tilde{x}\| + \|\mathrm{D}f(a)^{-1}\|\rho < \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{2} = \eta.
\end{aligned}$$

Wir wir bereits in Schritt 1 gezeigt haben, handelt es sich bei h_{y^*} um eine Kontraktion mit Kontraktionskonstante $\frac{1}{2}$.

<u>*Schritt 3*</u> (Differenzierbarkeit von f^{-1} und Ableitungsformel): Zu beliebigem $\bar{y} \in f(U)$ wählen wir $\sigma > 0$ mit $B(\bar{y}, \sigma) \subset f(U)$. Dann gibt es $\bar{x} \in U$ mit $\bar{y} = f(\bar{x})$ und für jedes $y \in B(\bar{y}, \sigma)$ existiert $x \in U$ mit $y = f(x)$. Daraus folgt

$$h_y(x) - h_y(\bar{x}) = x - \bar{x} + \mathrm{D}f(a)^{-1}(f(\bar{x}) - f(x)) = x - \bar{x} + \mathrm{D}f(a)^{-1}(\bar{y} - y).$$

Unter Verwendung von (12) folgt daraus

$$\|x - \bar{x} + \mathrm{D}f(a)^{-1}(\bar{y} - y)\| \leq \frac{1}{2}\|x - \bar{x}\|$$

und mit der Dreiecksungleichung nach unten (Satz 1.10) ergibt sich

$$\begin{aligned}
\|\mathrm{D}f(a)^{-1}(\bar{y} - y)\| &= \|\mathrm{D}f(a)^{-1}(\bar{y} - y) + (\bar{x} - x) - (\bar{x} - x)\| \\
&\geq \|\bar{x} - x\| - \|\mathrm{D}f(a)^{-1}(\bar{y} - y) + (\bar{x} - x)\| \\
&\geq \|\bar{x} - x\| - \frac{1}{2}\|x - \bar{x}\| = \frac{1}{2}\|\bar{x} - x\|
\end{aligned}$$

also

$$\|x - \bar{x}\| \leq 2\|\mathrm{D}f(a)^{-1}\| \cdot \|y - \bar{y}\|. \tag{13}$$

Nach Lemma 2.26 und (11) existiert die Inverse von $\mathrm{D}f(\bar{x})$ und

$$\begin{aligned} &f^{-1}(y) - f^{-1}(\bar{y}) - \mathrm{D}f(\bar{x})^{-1}(y - \bar{y}) = x - \bar{x} - \mathrm{D}f(\bar{x})^{-1}(f(x) - f(\bar{x})) \\ &= -\mathrm{D}f(\bar{x})^{-1}(f(x) - f(\bar{x}) - \mathrm{D}f(\bar{x})(x - \bar{x})). \end{aligned}$$

Mit (13) folgt hieraus für $y \neq \bar{y}$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{\|f^{-1}(y) - f^{-1}(\bar{y}) - \mathrm{D}f(\bar{x})^{-1}(y - \bar{y})\|}{\|y - \bar{y}\|} \\ &\leq 2\|\mathrm{D}f(a)^{-1}\| \cdot \|\mathrm{D}f(\bar{x})^{-1}\| \frac{\|f(x) - f(\bar{x}) - \mathrm{D}f(\bar{x})(x - \bar{x})\|}{\|x - \bar{x}\|}. \end{aligned}$$

Für $y \to \bar{y}$ gilt nun $x \to \bar{x}$ wegen (13) und damit konvergiert die rechte Seite wegen der Differenzierbarkeit von f gegen 0. Folglich konvergiert auch die linke Seite gegen 0. Damit ergibt sich unmittelbar die Differenzierbarkeit von f^{-1} von $\bar{y}$ und die Formel für die Ableitung, nämlich

$$\mathrm{D}f^{-1}(\bar{y}) = \mathrm{D}f(\bar{x})^{-1} = [\mathrm{D}f(f^{-1}(\bar{y}))]^{-1}. \tag{14}$$

Schritt 4 (Stetigkeit von $\mathrm{D}f^{-1} : f(U) \to \mathbb{R}^{N \times N}$): Wegen (14) gilt

$$\mathrm{D}f^{-1} = h \circ \mathrm{D}f \circ f^{-1},$$

wobei $h : \mathrm{Gl}(N, \mathbb{R}) \to \mathrm{Gl}(N, \mathbb{R})$ die Matrixinversion bezeichnet. Die Stetigkeit von $\mathrm{D}f^{-1}$ folgt nun aus der Stetigkeit der drei Funktionen, aus denen sie zusammengesetzt ist (siehe Satz 1.25(d)). Die Stetigkeit von f^{-1} folgt dabei aus der in Schritt 3 gezeigten Differenzierbarkeit und die Stetigkeit von h liefert Aussage (c) in Lemma 2.26. □

Im Fall $N = 1$ wissen wir: Ist $f : I \to \mathbb{R}$ eine auf einem Intervall definierte C^1-Funktion, die überall $f'(x) \neq 0$ erfüllt, so ist f streng monoton[8] und besitzt daher eine auf ganz $f(I)$ definierte Umkehrfunktion. Hier gilt der Umkehrsatz also nicht nur lokal. Dass die Voraussetzung der Invertierbarkeit von $\mathrm{D}f(x)$ in jedem Punkt bereits im Fall $N = 2$ nicht notwendigerweise die globale Invertierbarkeit von f impliziert, zeigt folgendes Beispiel.

2.28 Beispiel: Wir betrachten die Funktion[9]

$$f(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi), \quad f : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2.$$

Diese ist stetig differenzierbar mit

$$\mathrm{D}f(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

[8] Ist $f'(x) \neq 0$, so muss entweder $f'(x) > 0$ oder $f'(x) < 0$ für alle $x \in I$ gelten, da der Zwischenwertsatz ansonsten eine Nullstelle der stetigen Funktion f' liefern würde.

[9] Erinnerung: $(x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ ist die Polarkoordinatendarstellung eines Punktes $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Die Determinante hiervon ist $r(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r > 0$. Also ist $\mathrm{D}f(r,\varphi)$ in jedem Punkt invertierbar. Als Ganzes besitzt f dennoch keine Umkehrfunktion wegen der Periodizität von Sinus und Kosinus. Berechnen wir die Ableitung der lokalen Umkehrfunktion, die uns der Umkehrsatz liefert, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathrm{D}f^{-1}(x,y) &= \begin{pmatrix} \cos\arg(x+iy) & -\sqrt{x^2+y^2}\sin\arg(x+iy) \\ \sin\arg(x+iy) & \sqrt{x^2+y^2}\cos\arg(x+iy) \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & -y \\ \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}} & x \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$\Diamond$

2.29 Bemerkung: Der Umkehrsatz zeigt, dass die Invertierbarkeit von $\mathrm{D}f(a)$ hinreichend dafür ist, dass f in der Nähe von a ein Diffeomorphismus ist. Dass die Invertierbarkeit auch notwendig für die Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion ist, sieht man wie folgt. Aus $f^{-1}(f(x)) \equiv x$ folgt durch Ableiten

$$\mathrm{D}f^{-1}(f(x))\mathrm{D}f(x) \equiv I.$$

Also muss $\mathrm{D}f(x)$ für alle betrachteten x invertierbar sein.[10]

Die Invertierbarkeit ist allerdings nicht notwendig für die reine Existenz einer lokalen Umkehrfunktion. Betrachte dazu die Funktion $f(x) = x^3$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit Umkehrfunktion $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$. Da $f'(0) = 0$, erfüllt f bei $a = 0$ nicht die Voraussetzung des Umkehrsatzes.

2.5 Der Satz über implizite Funktionen

Viele zentrale Probleme der Mathematik lassen sich so formulieren, dass die Nullstellen einer geeignet definierten Funktion die Lösung liefern. In diesem Abschnitt wollen wir für Funktionen der Form

$$f : D \subset \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N \tag{15}$$

die Menge der Nullstellen (lokal) beschreiben. Um einen Anhaltspunkt für das angestrebte Ergebnis zu finden, betrachten wir zunächst wieder eine affine Funktion $f(x,y) = Ax + By + b$, $f : \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$. Ist hier die $N \times N$-Matrix B invertierbar, so lässt sich die Gleichung

$$Ax + By + b = 0$$

umformen zu

$$y = -B^{-1}(Ax + b).$$

[10]Falls Sie die Formel für die Ableitung von f^{-1} aus dem Umkehrsatz einmal vergessen sollten, können Sie sich diese durch Ableiten von $f^{-1} \circ f$ schnell wieder herleiten.

Daraus sieht man sofort, dass die Nullstellen von f die Punkte auf dem Graphen der Funktion $g(x) := -B^{-1}(Ax+b)$, $g : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^N$ sind. Diese Beobachtung wollen wir nun lokal auf differenzierbare Funktionen übertragen.

Wir betrachten im Folgenden eine C^1-Funktion der Form (15) und nehmen an, dass f eine Nullstelle $(a,b) \in D \subset \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N$ besitzt, also $f(a,b) = 0$. Die Jacobi-Matrix von f in (a,b) ist eine $N \times (M+N)$-Matrix und hat die Form

$$\mathrm{D}f(a,b) = (\mathrm{D}_1 f(a,b)|\mathrm{D}_2 f(a,b)) \in \mathbb{R}^{N\times M} \times \mathbb{R}^{N \times N},$$

wobei wir die Matrix $\mathrm{D}f_1(a,b)$ aus den ersten M Spalten und die Matrix $\mathrm{D}f_2(a,b)$ aus den letzten N Spalten von $\mathrm{D}f(a,b)$ bilden. Mit Hinblick auf den Fall einer affinen Funktion nehmen wir an, dass $\mathrm{D}f_2(a,b)$ invertierbar ist.

Nun können wir den *Satz über implizite Funktionen* formulieren, der uns unter den gegebenen Annahmen etwas über die Nullstellenmenge von f verrät.

2.30 Satz: *Sei $D \subset \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N$ offen, $(a,b) \in D$ und $f : D \to \mathbb{R}^N$ eine C^1-Funktion mit folgenden Eigenschaften:*

(i) $f(a,b) = 0$.

(ii) $\mathrm{D}_2 f(a,b)$ *ist invertierbar.*

Dann existieren offene Umgebungen $U \subset \mathbb{R}^M$ von a und $V \subset \mathbb{R}^N$ von b und eine C^1-Funktion $g : U \to V$, so dass gilt:

(a) $f(x, g(x)) = 0$ für alle $x \in U$, d.h. alle Punkte auf dem Graphen von g sind Nullstellen von f.

(b) Alle in $U \times V$ liegenden Nullstellen von f liegen auf dem Graphen von g. Insbesondere gilt $g(a) = b$.

(c) Es gilt $\mathrm{D}g(x) = -\left[\mathrm{D}_2 f(x,g(x))\right]^{-1} \cdot \mathrm{D}_1 f(x,g(x))$ für alle $x \in U$. Insbesondere gilt $\mathrm{D}g(a) = -\mathrm{D}_2 f(a,b)^{-1} \cdot \mathrm{D}_1 f(a,b)$.

Beweis: Der Beweis ist in zwei Schritte gegliedert.

Schritt 1 (Existenz von U und V): Wir wollen den Umkehrsatz anwenden und erweitern deshalb die Funktion f durch

$$h(x,y) := \begin{pmatrix} x \\ f(x,y) \end{pmatrix}, \quad h : D \to \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N.$$

Diese Funktion ist offensichtlich stetig differenzierbar mit Ableitung

$$\mathrm{D}h(x,y) = \begin{pmatrix} I_{M\times M} & 0_{M \times N} \\ \mathrm{D}_1 f(x,y) & \mathrm{D}_2 f(x,y) \end{pmatrix} \quad \text{für alle } (x,y) \in D.$$

Hierbei bezeichnet $I_{M\times M}$ die $M \times M$-Einheitsmatrix und $0_{M\times N}$ die $M \times N$-Nullmatrix. Wegen der vorausgesetzten Invertierbarkeit von $\mathrm{D}_2 f(a,b)$ ist

$\mathrm{D}h(a,b)$ invertierbar, wie man anhand der Determinante $\det \mathrm{D}h(a,b) = \det I_{M\times M} \cdot \det \mathrm{D}_2 f(a,b) = \det \mathrm{D}_2 f(a,b)$ sieht. Nach dem Umkehrsatz gibt es also eine Umgebung $W \subset D$ von (a,b) und eine C^1-Funktion

$$h^{-1} : h(W) \to W \subset \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N.$$

Wir wählen nun beliebige offene Umgebungen $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^M$ von a und $V \subset \mathbb{R}^N$ von b mit $\tilde{U} \times V \subset W$.[11] Dann ist $h(\tilde{U} \times V)$ wegen $h(a,b) = (a, f(a,b))^\top = (a,0)^\top$ als Urbild von $\tilde{U} \times V$ unter der stetigen Funktion h^{-1} (siehe Satz 1.23) eine offene Umgebung von $(a,0) \in \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N$. Dies garantiert die Existenz einer offenen Umgebung $U \subset \tilde{U}$ von a mit

$$U \times \{0\} \subset h(\tilde{U} \times V).$$

Für jedes $x \in U$ gibt es wegen der Injektivität von h auf $U \times V$ genau ein $y \in V$ mit $h(x,y) = (x,0)$, d.h. $f(x,y) = 0$.

Schritt 2 (Definition und Eigenschaften von $g : U \to V$): Der Wertebereich von h^{-1} ist der Raum $\mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N$. Dies können wir mit der Schreibweise

$$h^{-1}(x,y) = (h_1^{-1}(x,y), h_2^{-1}(x,y)) \in \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N$$

zum Ausdruck bringen. Wir definieren nun die gesuchte Funktion g durch

$$g(x) := h_2^{-1}(x,0), \quad g : U \to V.$$

(a) Aus der Identität $(x,y) \equiv h(h^{-1}(x,y))$ auf $h(U \times V)$ folgt

$$(x,y) \equiv (h_1^{-1}(x,y), f(h_1^{-1}(x,y), h_2^{-1}(x,y))) \quad \text{für alle } (x,y) \in h(U \times V).$$

Insbesondere für $y = 0$ ergibt dies

$$0 = f(x, g(x)) \quad \text{für alle } x \in U.$$

(b) Aus der Identität $(x,y) \equiv h^{-1}(h(x,y))$ auf $U \times V$ folgt

$$y = h_2^{-1}(x, f(x,y)) \quad \text{für alle } (x,y) \in U \times V.$$

Ist nun (x,y) eine Nullstelle von f in $U \times V$, so folgt $y = h_2^{-1}(x,0) = g(x)$.

(c) Setzen wir $G(x) := \begin{pmatrix} x \\ g(x) \end{pmatrix}$, $G : U \to U \times V$, so folgt aus $0 \equiv f(x, g(x)) \equiv f(G(x))$ mit der Kettenregel auf U:

$$\begin{aligned} 0 = \mathrm{D}f(G(x)) \cdot \mathrm{D}G(x) &= (\mathrm{D}_1 f(x,g(x)) | \mathrm{D}_2 f(x,g(x))) \cdot \begin{pmatrix} I \\ \mathrm{D}g(x) \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{D}_1 f(x,g(x)) + \mathrm{D}_2 f(x,g(x)) \cdot \mathrm{D}g(x). \end{aligned}$$

Lösen wir diese Gleichung nach $\mathrm{D}g(x)$ auf, so ergibt sich die gesuchte Formel. Dabei verwenden wir, dass $\mathrm{D}_2 f(x,g(x))$ für alle $x \in U$ invertierbar ist, was daran liegt, dass h auf $U \times V$ ein Diffeomorphismus ist. $\square$

[11] Es ist klar, dass ein Ball $B((a,b),\varepsilon) \subset W$ eine Menge der Form $\tilde{U} \times V$ enthält, z.B. $\tilde{U} := B(a, \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}})$ und $V := B(b, \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}})$.

2.31 Bemerkung:

- Der Name des Satzes kommt daher, dass die Funktion g nicht explizit, sondern implizit über die Funktion f gegeben ist.
- Die Aussagen (a) und (b) des Satzes lassen sich kurz durch die Gleichung

$$\{(x,y) \in U \times V : f(x,y) = 0\} = \{(x,y) \in U \times V : y = g(x)\}$$

  zusammenfassen.
- Die Funktion g können wir als Auflösung der nichtlinearen Gleichung $f(x,y) = 0$ nach y in der Nähe von (a,b) auffassen.

2.32 Beispiel: Das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2\mathrm{e}^u + vw &= 5 \\ v\cos u - 6u + 2w &= 7 \end{aligned}$$

mit den drei Unbekannten u, v, w besitzt, wie man leicht nachrechnet, die Lösung $(u,v,w) = (0,1,3)$. Wir wollen nun versuchen, mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen in der Nähe dieser Lösung noch weitere Lösungen zu finden. Dazu schreiben wir $x := w$, $y = (y_1, y_2) := (u,v)$ und setzen

$$f(x,y) := \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{y_1} + y_2 x - 5 \\ y_2 \cos y_1 - 6y_1 + 2x - 7 \end{pmatrix}.$$

Dann hat die partielle Jacobi-Matrix $\mathrm{D}_2 f(3,0,1)$ die Form

$$\mathrm{D}_2 f(3,0,1) = \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{y_1} & x \\ -y_2 \sin y_1 - 6 & \cos y_1 \end{pmatrix}_{|(x,y_1,y_2)=(3,0,1)} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Offensichtlich ist diese Matrix invertierbar. Folglich gibt es in der Nähe von $(3,0,1)$ noch weitere Lösungen und die Lösungskurve lässt sich mittels Satz 2.30(c) in erster Näherung mit Hilfe der Ableitung

$$\mathrm{D}g(3) = -\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

durch folgende affine Funktion beschreiben:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = g(3) + \mathrm{D}g(3)(w-3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}(w-3).$$

$\Diamond$

2.33 Bemerkung: Oft ist es so, dass der Satz über implizite Funktionen in der beschriebenen Form nicht direkt auf eine gegebene Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ mit $f(a,b) = 0$ anwendbar ist, da die aus den letzten N Spalten der

Jacobi-Matrix $\mathrm{D}f(a,b)$ gebildete Teilmatrix $\mathrm{D}_2 f(a,b)$ nicht invertierbar ist. Dies bedeutet aber nicht, dass der Satz überhaupt nicht anwendbar ist. Denn es gibt viele Möglichkeiten die Identifizierung von $\mathbb{R}^{M+N}$ mit $\mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N$ vorzunehmen. Letztendlich läuft die Verifizierung der Voraussetzungen des Satzes dann darauf hinaus, N linear unabhängige Spalten der Jacobi-Matrix $\mathrm{D}f(a,b)$ zu finden, die zusammen eine invertierbare $N \times N$-Matrix bilden.

2.6 Höhere Ableitungen

Die Ableitung einer Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ ist (sofern sie existiert) eine Funktion $\mathrm{D}f : D \to \mathbb{R}^{M\times N}$. Es stellt sich die Frage, ob diese Funktion wieder differenzierbar ist. Um diese Frage zu beantworten, müssen wir zunächst den Matrizenraum $\mathbb{R}^{M\times N}$ (auf natürliche Art) mit dem $\mathbb{R}^{M\cdot N}$ identifizieren. Die Ableitung von $\mathrm{D}f$ wäre dann eine Funktion von D nach $\mathbb{R}^{M\cdot N\times N}$. Setzen wir dies fort, so erhalten wir Räume von Matrizen immer größerer Dimension. Um die damit verbundenen Schwierigkeiten zu umgehen, betrachten wir nur höhere partielle Ableitungen.

Da bei der Bildung partieller Ableitungen nur Ableitungen von Funktionen mit eindimensionalem Argument berechnet werden, tritt hier das oben beschriebene Problem nicht auf. Für eine Funktion $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^M$ können wir rekursiv

$$f^{(0)} := f, \quad f^{(n+1)} := \mathrm{D}f^{(n)} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0$$

definieren, falls diese Ableitungen existieren. Die zweite und dritte Ableitung wird meist mit f'' bzw. f''' bezeichnet.

Ist der Definitonsbereich einer Funktion mehrdimensional, so kann man höhere Ableitungen mit Hilfe von partiellen Ableitungen erklären. Ist z.B. bei einer differenzierbaren Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ die i-te partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x_i} : D \to \mathbb{R}$ nach der j-ten Koordinate partiell differenzierbar, so nennt man

$$\partial_j \partial_i f : D \to \mathbb{R}$$

die **partielle Ableitung 2. Ordnung** von f (erst) nach x_i und (dann nach) x_j. Wir benutzen dafür auch die Schreibweise

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x).$$

Im Fall $i = j$ schreiben wir auch

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) = \partial_i^2 f(x) = \partial_i \partial_i f(x).$$

Entsprechend kann man zu höheren partiellen Ableitungen übergehen, z.B.

$$\frac{\partial^5 f}{\partial x_3^2 \partial x_1 \partial x_3^2}(x) = \partial_3^2 \partial_1 \partial_3^2 f(x).$$

Wir nennen eine differenzierbare Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ (im Sinne einer rekursiven Definition) bei $a \in D^\circ$ **k-mal differenzierbar** ($k = 2, 3, 4, \ldots$), falls jede Koordinatenfunktion von f in einer offenen Umgebung von a $(k-1)$-mal differenzierbar ist und alle partiellen Ableitungen bis zur Ordnung $k-1$ in a differenzierbar sind.

Die Funktion f heißt in D **k-mal stetig differenzierbar** oder $\mathbf{C^k}$**-Funktion** ($k = 2, 3, 4, \ldots$), wenn die Koordinatenfunktionen von f in D k-mal differenzierbar und alle partiellen Ableitungen bis zur Ordnung k in D stetig sind. Mit $\mathbf{C^k(D, \mathbb{R}^M)}$ bezeichnen wir die Menge aller C^k-Funktionen von D nach $\mathbb{R}^M$. Zusätzlich schreiben wir $\mathbf{C^0(D, \mathbb{R}^M)}$ oder $\mathbf{C(D, \mathbb{R}^M)}$ für die Menge der stetigen Funktionen von D nach $\mathbb{R}^M$ und $\mathbf{C^\infty(D, \mathbb{R}^M)}$ für die Menge der Funktionen, die für jedes $k \in \mathbb{N}$ C^k-Funktionen sind.

2.34 Beispiel: Die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}, \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

ist eine C^∞-Funktion. Für $x < 0$ ist dies trivial und für $x > 0$ zeigt man mit vollständiger Induktion, dass

$$f^{(k)}(x) = \frac{p_k(x)}{x^{2k}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N},\ x > 0 \tag{16}$$

mit Polynomen $p_k(x)$ vom Grad $k-1$. Bei $x = 0$ existieren alle Ableitungen $f^{(k)}(0)$, $k \in \mathbb{N}$, und sind gleich 0, was man induktiv zeigt. Induktionsanfang:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \to 0+} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{y \to \infty} y\mathrm{e}^{-y} = 0, \\ \lim_{x \to 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \to 0-} 0 = 0. \end{aligned}$$

Induktionsschritt ($k \to k+1$):

$$\lim_{x \to 0+} \frac{f^{(k)}(x)}{x} \overset{(16)}{=} \lim_{x \to 0+} \frac{p_k(x)}{x^{2k+1}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} = 0.$$

Damit ergibt sich $f^{(k+1)}(0) = 0$.

Das folgende Beispiel zeigt, dass i.A. die Reihenfolge der Ausführung partieller Ableitungen eine Rolle spielt.

2.35 Beispiel: Die Funktion

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^3 y - x y^3}{x^2 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}, \quad f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

ist partiell nach x differenzierbar mit

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Insbesondere gilt also $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = -y$ für alle $y \in \mathbb{R}$ und folglich

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1.$$

Analog zeigt man $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und damit

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1.$$

Der nun folgende *Satz von Schwarz* zeigt, dass die Reihenfolge der Bildung partieller Ableitungen keine Rolle spielt, falls wir die Stetigkeit der partiellen Ableitungen voraussetzen.

2.36 Satz: *Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ offen und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, für welche die partiellen Ableitungen $\partial_1 f$, $\partial_2 f$, $\partial_2\partial_1 f : D \to \mathbb{R}$ existieren. Ist dann $\partial_2\partial_1 f$ in $(a,b) \in D$ stetig, so existiert auch die partielle Ableitung $\partial_1\partial_2 f$ in (a,b) und*

$$\partial_1\partial_2 f(a,b) = \partial_2\partial_1 f(a,b).$$

Beweis: Da D offen ist, gibt es reelle Zahlen $h \neq 0$ und $k \neq 0$ mit

$$R := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x-a| \leq |h|,\ |y-b| \leq |k|\big\} \subset D.$$

Nun betrachten wir die differenzierbare Hilfsfunktion

$$g(t) := f(t, b+k) - f(t,b), \quad g : [a-|h|, a+|h|] \to \mathbb{R},$$

auf die wir den eindimensionalen Mittelwertsatz anwenden. Dies liefert ein $\alpha \in]a-|h|, a+|h|[$ mit

$$g(a+h) - g(a) = g'(\alpha) \cdot h = [\partial_1 f(\alpha, b+k) - \partial_1 f(\alpha, b)] \cdot h. \tag{17}$$

Als nächstes betrachten wir die Hilfsfunktion

$$p(s) := \partial_1 f(\alpha, s), \quad p : [b-|k|, b+|k|] \to \mathbb{R}.$$

Auch diese ist nach Voraussetzung differenzierbar und so gibt es nach dem Mittelwertsatz ein $\beta \in]b-|k|, b+|k|[$ mit

$$p(b+k) - p(b) = p'(\beta) \cdot k = \partial_2\partial_1 f(\alpha,\beta) \cdot k.$$

Kombinieren wir dies mit (17), so erhalten wir

$$g(a+h) - g(a) = \partial_2\partial_1 f(\alpha,\beta) \cdot hk. \tag{18}$$

Aufgrund der vorausgesetzten Stetigkeit von $\partial_2\partial_1 f$ gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ Zahlen $h \neq 0$ und $k \neq 0$, so dass

$$|\partial_2\partial_1 f(a,b) - \partial_2\partial_1 f(x,y)| \leq \varepsilon \quad \text{für alle} \quad (x,y) \in R = R(h,k).$$

Setzen wir dann $(x,y) = (\alpha,\beta)$, so folgt mit (18)

$$\left|\partial_2\partial_1 f(a,b) - \frac{f(a+h,b+k) - f(a+h,b) - f(a,b+k) + f(a,b)}{hk}\right| \leq \varepsilon.$$

Diese Beziehung ist auch für alle kleineren $|k|$ und $|h|$ gültig. Wir können also z.B. h festhalten und $k \to 0$ schicken. Dies ergibt

$$\left|\partial_2\partial_1 f(a,b) - \frac{\partial_2 f(a+h,b) - \partial_2 f(a,b)}{h}\right| \leq \varepsilon.$$

Strebt nun noch $h \to 0$, so erhalten wir das gewünschte Ergebnis. □

Mit vollständiger Induktion ergibt sich sofort folgendes Korollar.

2.37 Korollar: *Ist $f : D \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ eine C^k-Funktion mit $k \geq 2$, so stimmen je zwei partielle Ableitungen der Ordnungen $\leq k$ überein, bei denen gleich oft nach den gleichen Koordinaten differenziert wird.*

2.7 Der Taylorsche Satz

Die Differenzierbarkeit einer Funktion erlaubt es, die Funktion lokal durch eine affine Funktion zu approximieren. Existieren auch höhere Ableitungen, so kann man fragen, ob diese Näherung mit Hilfe der höheren Ableitungen verbessert werden kann, z.B. durch Polynome.

Sei nun $f : D \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ eine in $a \in D^\circ$ n-mal differenzierbare Funktion. Dann definieren wir folgende Polynome:

$$T_k(x,a) := \frac{1}{k!}\sum_{i_1=1}^{N}\cdots\sum_{i_k=1}^{N}\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k}\cdots\partial x_{i_1}}(a)x_{i_1}\cdots x_{i_k}, \qquad T_k(\cdot,a) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}.$$

Beachte, dass $T_k(\lambda x,a) = \lambda^k T_k(x,a)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Ein Polynom mit dieser Eigenschaft wird auch als **homogenes Polynom** bezeichnet.

2.38 Beispiel: Im Fall $N = 1$ vereinfacht sich die Formel für $T_k(x,a)$ zu

$$T_k(x,a) = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}x^k, \quad k = 1,\ldots,n.$$

Im Fall $N = 2$ erhalten wir für $k = 1,2$

$$T_1(x,a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)x_2 = \mathrm{grad} f(a)\cdot x,$$

$$
\begin{aligned}
T_2(x,a) &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a)x_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a)x_1x_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a)x_2x_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a)x_2^2\right] \\
&= \frac{1}{2}(x_1,x_2)\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Für beliebiges $N \in \mathbb{N}$ und $k = 1, 2$ erhält man analog zu oben

$$
\begin{aligned}
&T_1(x,a) = \mathrm{grad} f(a) \cdot x, \\
&T_2(x,a) = \frac{1}{2}(x_1,\ldots,x_N)\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_N \partial x_1}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_N}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_N^2}(a) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

$\Diamond$

Nun können wir den *Satz von Taylor* formulieren:

2.39 Satz: *Sei $D \subset \mathbb{R}^N$ offen und $f : D \to \mathbb{R}$ eine C^n-Funktion. Ferner seien $a, x \in D$ so gewählt, dass $\mathrm{Str}[a,x] \subset D$. Dann gibt es ein $\xi \in \mathrm{Str}[a,x]$ mit*

$$
f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} T_k(x-a,a) + T_n(x-a,\xi). \tag{19}
$$

Außerdem gilt

$$
\lim_{x \to a} \frac{T_n(x-a,\xi)}{\|x-a\|^{n-1}} = 0. \tag{20}
$$

Die Formel (19) heißt **Taylorsche Formel**, das darin auftretende Polynom $f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} T_k(x-a,a)$ heißt **$(n-1)$-tes Taylorpolynom** von f bei a und $T_n(x-a,\xi)$ heißt **Restglied nach Lagrange**.

2.40 Bemerkung: Der Taylorsche Satz verallgemeinert den Mittelwertsatz (Satz 2.21), denn im Fall $n = 1$ reduziert sich die Taylorformel auf

$$
f(x) = f(a) + \mathrm{grad} f(\xi) \cdot (x-a).
$$

Beweis: Der Beweis ist in drei Schritte unterteilt.

<u>*Schritt 1*</u> (Taylorformel für $N = 1$): Für ein fest gewähltes $x \neq a$ sei o.B.d.A. $x > a$. Dann betrachten wir die Hilfsfunktion

$$
h(t) := f(x) - f(t) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k - \alpha \frac{(x-t)^n}{n!}, \quad h : D \to \mathbb{R}. \tag{21}
$$

Für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt $h(x) = 0$. Zudem können wir α so wählen, dass $h(a) = 0$. Da h (nach Voraussetzung an f) differenzierbar ist, gibt es nach dem Satz von

Rolle (Analysis I) ein $\xi \in]a,x[$ mit $h'(\xi) = 0$. Wegen der leicht nachzurechnenden Beziehung

$$h'(t) = -\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} + \alpha\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} \quad \text{für alle } t \in D$$

folgt, indem wir $t = \xi$ setzen und nach α auflösen,

$$\alpha = f^{(n)}(\xi).$$

Ersetzen wir nun in (21) t durch a und α durch $f^{(k)}(\xi)$ und verwenden, dass $h(a) = 0$, so ergibt sich die Taylorformel.

<u>*Schritt 2*</u> (Taylorformel für beliebiges N): Die Hilfsfunktion

$$g(t) := f(a + t(x-a)), \quad g : J \to \mathbb{R},$$

J ein geeignetes offenes Intervall mit $[0,1] \subset J$, ist n-mal stetig differenzierbar und

$$\begin{aligned}
g'(t) &= \operatorname{grad} f(a+t(x-a)) \cdot (x-a) = \sum_{i_1=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}(a+t(x-a))(x_{i_1} - a_{i_1}),\\
g''(t) &= \sum_{i_1=1}^{N}\Big[\sum_{i_2=1}^{N} \frac{\partial^2 f}{\partial x_{i_2}\partial x_{i_1}}(a+t(x-a))(x_{i_2}-a_{i_2})\Big](x_{i_1}-a_{i_1}),\\
\vdots &= \vdots\\
g^{(k)}(t) &= \sum_{i_1=1}^{N}\cdots\sum_{i_k=1}^{N} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k}\cdots\partial x_{i_1}}(a+t(x-a))(x_{i_1}-a_{i_1})\cdots(x_{i_k}-a_{i_k})
\end{aligned}$$

für $k = 1,\ldots,n$. Damit gilt

$$g^{(k)}(0) = k!\,T_k(x-a,a) \quad \text{für} \quad k = 1,\ldots,n.$$

Anwendung der in Schritt 1 bewiesenen Taylorformel für $N = 1$ auf die Funktion g liefert

$$g(1) = g(0) + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{g^{(k)}(0)}{k!} + \frac{g^{(n)}(\eta)}{n!} \quad \text{für ein } \eta \in]0,1[,$$

und damit folgt die Behauptung mit $\xi := a + \eta(x-a)$.

<u>*Schritt 3*</u>: Die Grenzwertbeziehung (20) folgt aus der mit $|x_{i_k} - a_{i_k}| \le \|x-a\|$ gültigen Ungleichung

$$|T_n(x-a,\xi)| \le \frac{1}{n!}\sum_{i_1=1}^{N}\cdots\sum_{i_n=1}^{N}\left|\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_n}\cdots\partial x_{i_1}}(\xi)\right| \|x-a\|^n$$

unter Verwendung der Stetigkeit der hier auftretenden partiellen Ableitungen, die also auf jeder kompakten Teilmenge von D beschränkt sind (siehe Satz 1.61).

$\square$

Besitzt eine Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ an einem Punkt $a \in D^\circ$ alle partiellen Ableitungen beliebig hoher Ordnung, so kann man die Funktionenreihe

$$\Big(f(a) + \sum_{k=1}^{n} T_k(x-a,a)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$$

betrachten, die wir die **Taylorreihe** von f um a nennen. Im Fall $N = 1$ handelt es sich dabei offensichtlich um die Potenzreihe

$$\Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\Big)_{n\in\mathbb{N}_0}.$$

Folgendes Beispiel zeigt, dass bei einer C^∞-Funktion die Taylorreihe die Funktion nicht notwendigerweise approximiert.

2.41 Beispiel: Die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x}) & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ \exp(\frac{1}{x}) & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

ist, wie man mit den Argumenten aus Beispiel 2.34 zeigt, eine C^∞-Funktion. Es gilt $f^{(k)}(0) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Folglich verschwinden alle Koeffizienten der Taylorreihe von f um 0 und diese konvergiert in trivialer Weise gegen die Nullfunktion und nicht gegen f. $\Diamond$

Wir wollen denjenigen Funktionen, für die dieses Phänomen nicht auftritt, einen eigenen Namen geben.

2.42 Definition: *Eine C^∞-Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, D offen, heißt* **(reell) analytisch**, *falls für jeden Punkt $a \in D$ die Taylorreihe von f um a in einer Umgebung von a konvergiert und dort die Funktion f als Grenzfunktion besitzt.*

Beispiele für reell analytische Funktionen sind alle Funktionen, die über Potenzreihen eingeführt wurden, z.B. die Exponentialfunktion oder Sinus und Kosinus.

2.43 Beispiel: Wir betrachten die Exponentialfunktion

$$f(x) = \mathrm{e}^x, \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Wir wir wissen ist f differenzierbar mit $f' = f$. Damit ist klar, dass f sogar eine C^∞-Funktion ist. Die Ableitungen bei $x = 0$ ergeben alle den Wert 1, da $f(0) = 1$. Deshalb ist die zugehörige Taylorreihe um 0 gerade die Exponentialreihe

$$\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k\right)_{n\in\mathbb{N}_0}.$$

Da $f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ über diese Reihe definiert ist, können wir folgern, dass f reell analytisch ist.

2.8 Extremwerte

Eine der wichtigsten Anwendungen der Differentialrechnung besteht in der Berechnung von Extremwerten (Minima und Maxima). Diesem Thema wollen wir uns nun widmen. Dazu zunächst folgende Definitionen.

2.44 Definition: *Sei $f : D \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ und $a \in D$. Dann hat f bei a ein*

- **globales Maximum**, *falls $f(x) \leq f(a)$ für alle $x \in D$.*
- **lokales Maximum**, *falls ein $\delta > 0$ existiert mit $f(x) \leq f(a)$ für alle $x \in D \cap B(a, \delta)$.*
- **strenges lokales Maximum**, *falls ein $\delta > 0$ existiert mit $f(x) < f(a)$ für alle $a \neq x \in D \cap B(a, \delta)$.*

In jedem dieser Fälle heißt a **Maximalstelle** *und $f(a)$* **Maximalwert**. *Mit den umgekehrten Ungleichungen definiert man analog die drei Arten von Minima und spricht entsprechend von* **Minimalstellen** *und* **Minimalwerten**. *(Wollen wir uns nicht festlegen, ob wir von Minima oder Maxima sprechen, so verwenden wir die Begriffe* **Extremalstelle** *und* **Extremalwert**.*)*

Wie in der eindimensionalen Differentialrechnung ist das Verschwinden der Ableitung eine notwendige Bedingung für eine Extremalstelle.

2.45 Satz: *Eine Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ habe in einem Punkt $a \in D^\circ$ alle partiellen Ableitungen 1. Ordnung und f habe bei a ein lokales Extremum. Dann gilt* $\mathrm{grad} f(a) = 0$.

Beweis: Wir betrachten o.B.d.A. nur den Fall eines Maximums. Sei $\varepsilon > 0$ so gewählt, dass die Funktionen

$$h_i(t) := f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, \ldots, a_N), \;\; h_i : [-\varepsilon, \varepsilon] \to \mathbb{R},$$

für $i = 1, \ldots, N$ wohldefiniert sind und so, dass $f(a) = h_i(0) \geq h_i(t)$ für alle $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$. Dann gilt

$$\frac{h_i(t) - h_i(0)}{t} \begin{cases} \geq 0 & \text{für alle } t \in [-\varepsilon, 0) \\ \leq 0 & \text{für alle } t \in (0, \varepsilon] \end{cases}$$

Durch die Grenzübergänge $t \to 0^{\pm}$ folgt $h_i'(0) \leq 0$ und $h_i'(0) \geq 0$, also $h_i'(0) = 0$. Da $h_i'(0) = \partial_i f(a)$ und $\mathrm{grad} f(a) = (\partial_1 f(a), \ldots, \partial_N f(a))$, folgt damit die Behauptung. $\square$

Um eine hinreichende Bedingung für die Existenz eines lokalen Extremums zu formulieren, benötigen wir den Satz von Taylor. Wir nennen das Polynom $T_k(x-a, a)$ **positiv definit** bzw. **negativ definit**, falls es abgesehen von der Nullstelle $x = a$ nur positive bzw. negative Werte annimmt. Es heißt **indefinit**, falls es positive und negative Werte annimmt.

2.46 Satz: *Sei $f : D \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ eine C^{n+1}-Funktion und $a \in D$ mit*

$$T_k(x-a,a) = 0 \quad \text{für alle } \ x \in \mathbb{R}^N,\ k = 1,\dots,n-1. \tag{22}$$

Dann gelten folgende Implikationen:

- $T_n(\cdot,a)$ *positiv definit* $\Rightarrow$ *strenges lokales Minimum bei* a
- $T_n(\cdot,a)$ *negativ definit* $\Rightarrow$ *strenges lokales Maximum bei* a
- $T_n(\cdot,a)$ *indefinit* $\Rightarrow$ *kein Extremum bei* a

Beweis: Nach dem Satz von Taylor (Satz 2.39) gilt unter Verwendung der Voraussetzung (22) für jedes $x \neq a$ aus einem Ball $B(a,\delta) \subset D$ mit einem $\xi \in \mathrm{Str}[a,x]$ die Beziehung

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= T_n(x-a,a) + T_{n+1}(x-a,\xi) \\ &= \|x-a\|^n \Big[T_n\left(\frac{x-a}{\|x-a\|}, a\right) + \underbrace{\frac{T_{n+1}(x-a,\xi)}{\|x-a\|^n}}_{\to 0 \text{ für } x\to a} \Big]. \end{aligned}$$

Nun betrachten wir die möglichen Fälle für $T_n(\cdot,a)$:

(a) $T_n(\cdot,a)$ sei positiv definit. Dann nimmt $T_n(\cdot,a)$ auf der kompakten Menge $S_1(0) := \{x \in \mathbb{R}^N : \|x\| = 1\}$ ein globales Minimum μ an und dieses ist nach Voraussetzung positiv. Also existiert $\bar{x} \in S_1(0)$ mit

$$T_n\left(\frac{x-a}{\|x-a\|}, a\right) \geq T_n(\bar{x},a) = \mu > 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^N \backslash \{a\}.$$

Wählen wir $\varepsilon > 0$ so klein, dass der Restterm kleiner als $\frac{\mu}{2}$ wird, so folgt

$$f(x) - f(a) \geq \|x-a\|^n \left(\mu - \frac{\mu}{2}\right) > 0 \quad \text{für alle } a \neq x \in B(a,\varepsilon).$$

(b) $T_n(\cdot,a)$ sei negativ definit. Analog wie in (a).

(c) $T_n(\cdot,a)$ sei indefinit. Dann gibt es $\tilde{x}, \hat{x} \in \mathbb{R}^N$ mit $T_n(\tilde{x},a) < 0 < T_n(\hat{x},a)$. Für alle $t > 0$ mit $a + t\tilde{x} \in B(a,\delta)$ gilt dann

$$f(a+t\tilde{x}) - f(a) = \|t\tilde{x}\|^n \Big[T_n\left(\frac{\tilde{x}}{\|\tilde{x}\|}, a\right) + \frac{T_{n+1}(t\tilde{x},\xi)}{\|t\tilde{x}\|^n} \Big].$$

Daraus folgt, dass es beliebig nahe bei a Punkte der Form $a+t\tilde{x}$ mit $f(a+t\tilde{x}) < f(a)$ gibt. Analog zeigt man, dass es Punkte der Form $a+t\hat{x}$ mit $f(a+t\hat{x}) > f(a)$ gibt. Also hat f bei a weder ein Maximum noch ein Minimum. $\square$

Es stellt sich die Frage, wie man die hinreichenden Bedingungen des obigen Satzes praktisch nachweist. Wir betrachten die wichtigsten Spezialfälle:

Der Fall $N = 1$: Unter der Voraussetzung, dass $f^{(k)}(a) = 0$ für $k = 1,\dots,n-1$ und $f^{(n)}(a) \neq 0$ gelten nach obigem Satz wegen $T_n(x-a,a) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ die Implikationen

- n gerade und $f^{(n)}(a) > 0 \Rightarrow$ strenges lokales Minimum bei a
- n gerade und $f^{(n)}(a) < 0 \Rightarrow$ strenges lokales Maximum bei a
- n ungerade $\Rightarrow$ kein Extremum bei a

<u>Der Fall N beliebig, $n = 2$:</u> Das Polynom $T_2(x - a, a)$ ist dann die quadratische Form

$$\frac{1}{2}(x_1 - a_1, \ldots, x_N - a_N) \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_N \partial x_1}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_N}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_N^2}(a) \end{pmatrix}}_{=:H_f(a)} \begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ \vdots \\ x_N - a_N \end{pmatrix}.$$

Die hier auftretende **Hesse-Matrix** $H_f(a)$ von f bei a ist nach dem Satz von Schwarz symmetrisch. Die Definitheit von $T_2(\cdot, a)$ ist deshalb äquivalent zur Definitheit der Hesse-Matrix von f bei a.

Wir erinnern an dieser Stelle an die aus der Linearen Algebra bekannten Kriterien zur Prüfung der Definitheit einer Matrix. Eine symmetrische (reelle) Matrix ist genau dann positiv bzw. negativ definit, wenn alle ihre Eigenwerte positiv bzw. negativ sind.[12] Sie ist genau dann indefinit, wenn sie Eigenwerte mit verschiedenen Vorzeichen hat. Zudem gibt es ein Determinantenkriterium: Eine symmetrische Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ ist genau dann positiv definit, wenn

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} > 0 \quad \text{für alle} \quad n = 1, \ldots, N,$$

und genau dann negativ definit, wenn $-A$ positiv definit ist.

Zusammenfassend können wir folgendes Rezept zur Bestimmung der Extremalstellen einer Funktion angeben:

(1) Bestimme alle inneren Punkte a von D mit $\operatorname{grad} f(a) = 0$.

(2) Untersuche die in (1) gefundenen Punkte mit Hilfe von Satz 2.46.

(3) Untersuche die zu D gehörigen Randpunkte. (Dafür gibt es keine allgemeingültige Methode.)

Oft ist es der Fall, dass man Extremalstellen unter gewissen Nebenbedingungen bestimmen muss. Dazu folgendes Beispiel.

2.47 Beispiel: Wir wollen die lokalen Extrema der Funktion

$$f(x, y) = x^2 + y^2, \quad f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

[12] Beachte: Eine reelle symmetrische Matrix hat nur reelle Eigenwerte.

unter der Nebenbedingung

$$x - y = 1$$

bestimmen. Dies können wir tun, indem wir die Nebenbedingung nach y auflösen und das Ergebnis in die Funktion f einsetzen, also

$$\tilde{f}(x) := f(x, x-1) = x^2 + (x-1)^2, \quad \tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Für diese Funktion können wir unser Rezept anwenden und erhalten $x = \frac{1}{2}$ als einzige Extremalstelle. Dabei handelt es sich um eine Minimalstelle mit Minimalwert $\frac{1}{2}$. $\diamondsuit$

Eine allgemeine Methode zur Bestimmung von Extremalstellen unter Nebenbedingung liefert uns die **Lagrangesche Multiplikatorenregel**.

2.48 Satz: *Sei $D \subset \mathbb{R}^N$ offen und $f : D \to \mathbb{R}$, $g : D \to \mathbb{R}^M$ mit $M < N$ seien C^1-Funktionen. Hat dann die Einschränkung von f auf die Menge $D_0 := \{x \in D : g(x) = 0\}$ ein lokales Extremum bei $a \in D_0$ und ist der Rang der Jacobi-Matrix $\mathrm{D}g(a)$ maximal, d.h. gilt*

$$\mathrm{Rang}(\mathrm{D}g(a)) = M,$$

so gibt es einen Vektor $\lambda \in \mathbb{R}^M$ mit

$$\mathrm{grad} f(a) + \lambda^\top \cdot \mathrm{D}g(a) = 0. \tag{23}$$

Bevor wir den Satz beweisen, wollen wir uns klarmachen, welche Bedeutung der Vektor λ darin hat, dessen Komponenten $\lambda_1, \ldots, \lambda_M$ man auch **Lagrangesche Multiplikatoren** nennt.

2.49 Bemerkung: Der Vektor λ tritt in der Gleichung (23) als reine Hilfsgröße auf, die man benötigt, um das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \mathrm{grad} f(a) + \lambda^\top \cdot \mathrm{D}g(a) &= 0 \\ g(a) &= 0 \end{aligned}$$

zu lösen, das aus $N + M$ Gleichungen für $N + M$ Unbekannte besteht. Hat man eine Lösung dieses Gleichungssystems gefunden, so interessieren nur noch die ersten N Komponenten dieser Lösung, die einen Vektor a bilden, der eine Extremalstelle sein könnte.

Beweis: Wir ordnen die Koordinaten von x so um, dass die letzten M Spalten von $\mathrm{D}g(a)$ linear unabhängig sind. Schreiben wir dann $x = (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^{N-M} \times \mathbb{R}^M$ und $a = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^{N-M} \times \mathbb{R}^M$, so können wir $\mathrm{D}g(a)$ schreiben als

$$\mathrm{D}g(\alpha, \beta) = (\underbrace{\mathrm{D}_1 g(\alpha, \beta)}_{\in \mathbb{R}^{M \times (N-M)}} \,|\, \underbrace{\mathrm{D}_2 g(\alpha, \beta)}_{\in \mathbb{R}^{M \times M}}),$$

wobei $\mathrm{D}_2 g(\alpha,\beta)$ invertierbar ist. Nach dem Satz über implizite Funktionen gibt es Umgebungen $U \subset \mathbb{R}^{N-M}$ von α und $V \subset \mathbb{R}^M$ von β und eine C^1-Funktion $h : U \to V$ mit

$$D_0 \cap (U \times V) = \{(\xi,\eta) \in U \times V : \eta = h(\xi)\}.$$

Außerdem gilt

$$\mathrm{D}h(\alpha) = -\mathrm{D}_2 g(\alpha,\beta)^{-1} \cdot \mathrm{D}_1 g(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^{M\times(N-M)}.$$

Die Funktion $\tilde{f}(\xi) := f(\xi, h(\xi))$, $\tilde{f} : U \to \mathbb{R}$, hat nun auch ein lokales Extremum bei α, d.h. es gilt nach Satz 2.45

$$\mathrm{D}\tilde{f}(\alpha) = \mathrm{grad}\tilde{f}(\alpha) = 0 \in \mathbb{R}^{1\times(N-M)}.$$

Mit der Hilfsfunktion $H(\xi) := (\xi, h(\xi))$, $H : U \to U \times V$ gilt dann $\tilde{f}(\xi) \equiv f(\xi, h(\xi)) \equiv f(H(\xi))$ und damit folgt mit der Kettenregel

$$\begin{aligned} 0 &= \mathrm{D}f(H(\alpha)) \cdot \mathrm{D}H(\alpha) = (\mathrm{D}_1 f(\alpha,\beta) | \mathrm{D}_2 f(\alpha,\beta)) \cdot \begin{pmatrix} I \\ \mathrm{D}h(\alpha) \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{D}_1 f(\alpha,\beta) + \mathrm{D}_2 f(\alpha,\beta) \cdot \mathrm{D}h(\alpha) \\ &= \mathrm{D}_1 f(\alpha,\beta) - \mathrm{D}_2 f(\alpha,\beta) \cdot \mathrm{D}_2 g(\alpha,\beta)^{-1} \cdot \mathrm{D}_1 g(\alpha,\beta). \end{aligned}$$

Für den durch

$$\lambda^\top := -\mathrm{D}_2 f(\alpha,\beta) \cdot \mathrm{D}_2 g(\alpha,\beta)^{-1} \in \mathbb{R}^{1\times M}$$

definierten Zeilenvektor $\lambda^\top$ gilt offensichtlich

$$\lambda^\top \cdot \mathrm{D}_2 g(\alpha,\beta) + \mathrm{D}_2 f(\alpha,\beta) = 0 \in \mathbb{R}^{1\times M}.$$

Außerdem folgt

$$\lambda^T \cdot D_1 g(\alpha,\beta) + \mathrm{D}_1 f(\alpha,\beta) = 0 \in \mathbb{R}^{1\times(N-M)}.$$

Die letzten beiden Gleichungen zusammengenommen zeigen dann, dass die Behauptung des Satzes gilt. □

Wir verzichten darauf, auch hinreichende Bedingungen für die Existenz von Extremwerten unter Nebenbedingungen anzugeben und verweisen dafür auf die Optimierungstheorie.

Wir können nun folgendes Rezept zur Bestimmung von Extremwerten unter Nebenbedingungen angeben:

(1) Bestimme alle $a \in D^\circ$ und $\lambda \in \mathbb{R}^M$ mit

$$\begin{aligned} \mathrm{grad} f(a) + \lambda^T \cdot \mathrm{D}g(a) &= 0 \\ g(a) &= 0 \end{aligned}$$

(2) Prüfe, ob die in (1) gefundenen Punkte a die Bedingung $\mathrm{Rang}(\mathrm{D}g(a)) = M$ erfüllen.

(3) Prüfe, ob die in (1) und (2) gefundenen Punkte Extremalstellen sind (keine allgemeingültige Methode im Rahmen der elementaren Analysis).

(4) Untersuche die zu D gehörigen Randpunkte von D und diejenigen $a \in D$ mit $g(a) = 0$ und $\operatorname{Rang}(\mathrm{D}g(a)) < M$ (keine allgemeingültige Methode).

Dieses Rezept wollen wir nun an dem bereits betrachteten Beispiel durchführen.

2.50 Beispiel: Gegeben seien

$$f(x,y) := x^2 + y^2, \quad g(x,y) := x - y - 1, \quad f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}.$$

Dann ist $N = 2$, $M = 1$ und $D = \mathbb{R}^2$.

(1) Wir betrachten das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} (2a, 2b) + \lambda \cdot (1, -1) &= (0, 0), \\ a - b - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem für die Variablen a, b, λ mit der eindeutigen Lösung

$$(a, b) = (1/2, -1/2), \quad \lambda = -1.$$

(2) Der Punkt $(a, b) = (1/2, -1/2)$ erfüllt die Rangbedingung, denn $\operatorname{Rang}(\mathrm{D}g(a, b)) = \operatorname{Rang}(1, -1) = 1$.

(3) Folgende Rechnung zeigt, dass der Punkt $(1/2, -1/2)$ die Stelle eines strengen lokalen (sogar globalen) Minimums ist:

$$\begin{aligned} f(x, x-1) - f(1/2, -1/2) &= x^2 + (x-1)^2 - \frac{1}{2} \\ &= 2x^2 - 2x + \frac{1}{2} = 2\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 > 0. \end{aligned}$$

(4) Der Rand von D ist leer und da $\operatorname{Rang}(\mathrm{D}g(x, y)) = 1$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gilt, verletzt kein Punkt die Rangbedingung. $\Diamond$

2.9 Stammfunktionen

Stammfunktionen für Funktionen in einer Veränderlichen kennen wir bereits aus der Analysis I. Wir wollen uns nun überlegen, inwieweit wir das Bekannte auf Funktionen in mehreren Veränderlichen verallgemeinern können.

Wir nennen eine Menge $G \subset \mathbb{R}^N$ ein **Gebiet**, falls G offen und zusammenhängend ist.

2.51 Definition: *Gegeben sei ein Gebiet $G \subset \mathbb{R}^N$ und eine stetige Funktion $f : G \to \mathbb{R}^N$. Eine C^1-Funktion $F : G \to \mathbb{R}$, für die*

$$\operatorname{grad} F(x) = f(x) \quad \textit{für alle } x \in G$$

gilt, heißt **Stammfunktion** *von f auf G.*

Wie im eindimensionalen Fall sind Stammfunktionen auch hier nur bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt. Der Grund dafür ist, dass die Differenz zweier Stammfunktionen einen verschwindenden Gradienten besitzt und somit nach Satz 2.22 auf der zusammenhängenden Menge G konstant ist.

Hinreichende Bedingungen für die Existenz einer Stammfunktion werden wir im Rahmen der Integrationstheorie kennenlernen. Im Folgenden wollen wir eine notwendige Bedingung herleiten. Dazu gehen wir von einer C^1-Funktion $f : G \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ mit einer Stammfunktion $F : G \to \mathbb{R}$ aus. Diese ist dann von der Klasse C^2, da ihre Ableitung f eine C^1-Funktion ist. Nach dem Satz von Schwarz (Satz 2.36) lassen sich dann die partiellen Ableitungen von F zweiter Ordnung vertauschen. Damit folgt für alle $x \in G$ und $i, j = 1, \ldots, N$:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i}(x) = \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x).$$

Als notwendige Bedingung für die Existenz einer Stammfunktion von f auf G erhalten wir also die sogenannte **Integrabilitätsbedingung**

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) \text{ für alle } x \in G \text{ und } i, j = 1, \ldots, N.$$

Diese Bedingung ist offensichtlich sehr einschränkend. Außerdem ist sie, wie wir im folgenden Beispiel sehen werden, i.A. nicht hinreichend. Die Existenz einer Stammfunktion ist für Funktionen mit mehrdimensionalem Definitionsbereich daher eher die Ausnahme als die Regel.

2.52 Beispiel: Wir betrachten die auf $G := \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ definierte Funktion

$$f(x_1, x_2) := \left(\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{-x_1}{x_1^2 + x_2^2} \right), \quad f : G \to \mathbb{R}^2.$$

Sie erfüllt die Integrabilitätsbedingung, denn

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 - x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1, x_2) \text{ für alle } (x_1, x_2) \in G.$$

Dennoch besitzt f keine Stammfunktion auf G. Wäre nämlich F eine solche Stammfunktion, so würde Folgendes gelten: Die Funktion

$$P(t) := F(\cos t, \sin t), \quad P : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

ist einerseits periodisch mit Periode 2π und andererseits gilt für ihre Ableitung nach der Kettenregel

$$\begin{aligned} P'(t) &= -\frac{\partial F}{\partial x_1}(\cos t, \sin t)\sin t + \frac{\partial F}{\partial x_2}(\cos t, \sin t)\cos t \\ &= -\sin^2 t - \cos^2 t = -1. \end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass $P(t) = -t + c$ für eine Konstante c im Widerspruch zur Periodizität. $\Diamond$

Nun wollen wir uns für den Fall $N = 2$ überlegen, wie man gegebenenfalls eine Stammfunktion berechnen kann.

Dazu sei $f : G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine C^1-Funktion, die die Integrabilitätsbedingung erfüllt. Wir machen den Ansatz

$$F(x_1, x_2) = \int f_1(x_1, x_2)\mathrm{d}x_1 + c(x_2)$$

Durch Ableiten nach x_2 schließen wir auf die Gleichung

$$c'(x_2) = f_2(x_1, x_2) - \frac{\partial}{\partial x_2}\int f_1(x_1, x_2)\mathrm{d}x_1,$$

deren rechte Seite (wie die linke) von x_1 unabhängig ist. Integration der rechten Seite bzgl. x_2 liefert dann $c(x_2)$ und somit die gesuchte Stammfunktion F.

Analog kann man natürlich auch den Ansatz

$$F(x_1, x_2) = \int f_2(x_1, x_2)\mathrm{d}x_2 + a(x_1) \tag{24}$$

machen und die Funktion $a(x_1)$ durch Integration von

$$a'(x_1) = f_1(x_1, x_2) - \frac{\partial}{\partial x_1}\int f_2(x_1, x_2)\mathrm{d}x_2 \tag{25}$$

bzgl. x_1 bestimmen.

2.53 Beispiel: Für die Funktion

$$f(x_1, x_2) := (x_2 \mathrm{e}^{x_1}(1 + x_1), x_1 \mathrm{e}^{x_1}), \quad f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

kann man leicht zeigen, dass die Integrabilitätsbedingung erfüllt ist. Man stellt leicht fest, dass von den beiden in Frage kommenden Integralen

$$\int x_2 \mathrm{e}^{x_1}(1 + x_1)\mathrm{d}x_1 \quad \text{und} \quad \int x_1 \mathrm{e}^{x_1}\mathrm{d}x_2$$

das zweite einfacher als das erste zu bestimmen ist. Die Beziehungen (24) und (25) lauten dann

$$F(x_1, x_2) = x_1 x_2 \mathrm{e}^{x_1} + a(x_1)$$

$$a'(x_1) = x_2 \mathrm{e}^{x_1}(1 + x_1) - \frac{\partial}{\partial x_1}[x_1 x_2 \mathrm{e}^{x_1}] = 0.$$

Also hat die gesuchte Stammfunktion die Form $x_1 x_2 \mathrm{e}^{x_1} + c$ mit einer additiven Konstante c. Um zu zeigen, dass es sich dabei tatsächlich um eine Stammfunktion handelt, muss man die partiellen Ableitungen berechnen! $\Diamond$

3 Integration

In diesem Abschnitt entwickeln wir die Theorie des Riemann'schen Integrals für Funktionen mit mehrdimensionalem Definitionsbereich. Insbesondere können wir damit Teilmengen des $\mathbb{R}^N$ einen „Inhalt“, d.h. eine Maßzahl für ihre Größe zuordnen.

3.1 Der Integralbegriff

Gegeben seien Punkte $a, b \in \mathbb{R}^N$ mit Komponenten $a_i \leq b_i$, $i = 1, \ldots, N$. Jede Menge $Q \subset \mathbb{R}^N$ mit

$$]a_1, b_1[\times \ldots \times]a_N, b_N[\subset Q \subset [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_N, b_N]$$

nennen wir einen N-dimensionalen Quader. Die zugehörige Zahl

$$J_N(Q) := \prod_{i=1}^{N} (b_i - a_i) \geq 0$$

nennen wir den **N-dimensionalen Inhalt** von Q. Jedes der Intervalle $[a_i, b_i]$ heißt **Kante** von Q und die Zahl $J_1([a_i, b_i]) = b_i - a_i$ heißt **Länge** der Kante $[a_i, b_i]$.

3.1 Definition: *Ist $Q = Q(a, b)$ ein N-dimensionaler Quader, so heißt eine Menge der Form*

$$Z := Z_1 \times \ldots \times Z_N \subset \mathbb{R}^N$$

eine **Zerlegung** *von Q, wenn jede der Mengen $Z_i \subset \mathbb{R}$ eine endliche Menge reeller Zahlen $x_{i,0}, x_{i,1}, \ldots, x_{i,n_i}$ ist mit der Eigenschaft*

$$a_i = x_{i,0} < x_{i,1} < \ldots < x_{i,n_i} = b_i, \quad i = 1, \ldots, N.$$

Sind Z und $\tilde{Z}$ zwei Zerlegungen von Q, so heißt $\tilde{Z}$ **Verfeinerung** *von Z, falls $Z \subset \tilde{Z}$. Die Menge aller Zerlegungen von Q bezeichnen wir mit $\mathcal{Z}(Q)$.*

Der Zerlegung Z in obiger Definition zerlegt den Quader Q in $n = \prod_{i=1}^{N} n_i$ Teilquader $Q_1, \ldots, Q_n$. Daraus ergibt sich

$$J_N(Q) = \sum_{i=1}^{n} J_N(Q_i).$$

Unser erstes Ziel ist es, die Inhalte von Mengen G zu bestimmen, die zwischen dem Graphen einer Funktion und ihrem Definitionsbereich liegen. Ist dabei der Definitionsbereich ein Quader $Q \subset \mathbb{R}^N$ und ist $f : Q \to \mathbb{R}$ konstant mit $f(x) = c > 0$, so ist auch G wieder ein Quader, nämlich $Q \times [0, c]$ und wir können den Inhalt von G sofort angeben: $J_{N+1}(Q \times [0, c]) = c \cdot J_N(Q)$. Ausgehend von dieser Überlegung versuchen wir die Inhalte der Mengen

$$\{(x, y) \in Q \times \mathbb{R} : 0 \leq y \leq f(x)\}$$

näherungsweise zu bestimmen.

3.2 Definition: *Sei $f : Q \to \mathbb{R}$ eine auf einem Quader $Q \subset \mathbb{R}^N$ definierte beschränkte Funktion. Ist dann Z eine Zerlegung von Q in n Teilquader $Q_1, \ldots, Q_n$, so nennt man die Zahlen*

$$\underline{S}_{f,Q}(Z) := \sum_{j=1}^{n} \inf f(Q_j) \cdot J_N(Q_j), \ \overline{S}_{f,Q}(Z) := \sum_{j=1}^{n} \sup f(Q_j) \cdot J_N(Q_j)$$

die zur Zerlegung gehörige **Unter-** *bzw.* **Obersumme** *von f.*

Aufgrund elementargeometrischer Überlegungen erwartet man, dass sich die Obersumme einer Funktion $f : Q \to \mathbb{R}$ verkleinert und die Untersumme vergrößert, wenn man von einer Zerlegung des Quaders Q zu einer Verfeinerung übergeht. Folgendes Lemma zeigt u.a., dass dies tatsächlich so ist.

3.3 Lemma: *Für jeden Quader $Q \subset \mathbb{R}^N$ und jede beschränkte Funktion $f : Q \to \mathbb{R}$ gilt:*

(a) Sind $Z, \tilde{Z}$ Zerlegungen von Q mit $Z \subset \tilde{Z}$, so gilt

$$\underline{S}_{f,Q}(Z) \leq \underline{S}_{f,Q}(\tilde{Z}) \leq \overline{S}_{f,Q}(\tilde{Z}) \leq \overline{S}_{f,Q}(Z).$$

(b) Für beliebige Zerlegungen $Z, \hat{Z}$ von Q gilt

$$\underline{S}_{f,Q}(Z) \leq \overline{S}_{f,Q}(\hat{Z}).$$

Beweis: (a) Die mittlere Ungleichung ist trivial. Um die erste Ungleichung zu zeigen, nehmen wir o.B.d.A. an, dass $\tilde{Z}$ nur in der ersten Koordinate einen Punkt mehr besitzt als Z. Beim Übergang von Z zu $\tilde{Z}$ wird also ein Quader Q^* in zwei Quader Q_1^*, Q_2^* zerlegt und der Ausdruck $\inf f(Q^*) \cdot J_N(Q^*)$ in der Summe $\underline{S}_{f,Q}(Z)$ wird ersetzt durch $\inf f(Q_1^*) \cdot J_N(Q_1^*) + \inf f(Q_2^*) \cdot J_N(Q_2^*)$ in der Summe $\underline{S}_{f,Q}(\tilde{Z})$. Es gilt nun

$$\begin{aligned}\inf f(Q^*) \cdot J_N(Q^*) &= \inf f(Q^*) \cdot J_N(Q_1^*) + \inf f(Q^*) \cdot J_N(Q_2^*) \\ &\leq \inf f(Q_1^*) \cdot J_N(Q_1^*) + \inf f(Q_2^*) \cdot J_N(Q_2^*).\end{aligned}$$

Die dritte Ungleichung zeigt man analog zur ersten.
(b) Mit $\tilde{Z} := Z \cup \hat{Z}$ folgt $Z \subset \tilde{Z}$ und $\hat{Z} \subset \tilde{Z}$ und damit gilt wegen (a)

$$\underline{S}_{f,Q}(Z) \leq \underline{S}_{f,Q}(\tilde{Z}) \leq \overline{S}_{f,Q}(\tilde{Z}) \leq \overline{S}_{f,Q}(\hat{Z}).$$

□

Aus dem Lemma folgt insbesondere, dass die Mengen

$$\{\underline{S}_{f,Q}(Z) : Z \in \mathcal{Z}(Q)\} \quad \text{und} \quad \{\overline{S}_{f,Q}(Z) : Z \in \mathcal{Z}(Q)\}$$

nach oben bzw. nach unten beschränkt sind. Diese Tatsache benötigen wir in der nun folgenden Definition des **Riemann'schen Integrals**.

3.4 Definition: *Gegeben sei ein Quader $Q \subset \mathbb{R}^N$ und eine beschränkte Funktion $f : Q \to \mathbb{R}$. Dann heißt*

$$\underline{\int_Q} f := \sup\left\{\underline{S}_{f,Q}(Z) : Z \in \mathcal{Z}(Q)\right\}$$

Unterintegral *von f auf Q und*

$$\overline{\int_Q} f := \inf\left\{\overline{S}_{f,Q}(Z) : Z \in \mathcal{Z}(Q)\right\}$$

heißt **Oberintegral** *von f auf Q. Gilt $\underline{\int_Q} f = \overline{\int_Q} f$, so heißt f* **(Riemann-) integrierbar** *und*

$$\int_Q f := \underline{\int_Q} f = \overline{\int_Q} f$$

heißt **Riemann-Integral** *von f auf Q.*

3.5 Bemerkung: An Stelle von $\int_Q f$ sind auch die Bezeichnungen

$$\int_Q f(x)\mathrm{d}x \quad \text{oder} \quad \int_Q f(x_1,\ldots,x_N)\mathrm{d}(x_1,\ldots,x_N)$$

gebräuchlich. Die Funktion f nennt man **Integrand** und x heißt **Integrationsvariable**. Im Fall $N = 1$ ist Q ein kompaktes Intervall $[a,b]$ und man schreibt statt $\int_{[a,b]} f$ auch

$$\int_a^b f \quad \text{oder} \quad \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

und nennt a die **untere** und b die **obere** Integrationsgrenze. Ist $a > b$, so definiert man

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x := -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x.$$

3.6 Beispiel: Sei $Q \subset \mathbb{R}^N$ ein Quader und $f(x) := c > 0$, $f : Q \to \mathbb{R}$ eine konstante Funktion. Um $\int_Q f$ zu berechnen, wählen wir eine beliebige Zerlegung Z von Q in Teilquader $Q_1, \ldots, Q_n$. Dann gilt offensichtlich $f(Q_j) = \{c\}$ und somit

$$\inf f(Q_j) = c = \sup f(Q_j), \quad j = 1, \ldots, n.$$

Damit folgt, da $Z \in \mathcal{Z}(Q)$ beliebig gewählt war,

$$\underline{S}_{f,Q}(Z) = \sum_{j=1}^{n} c \cdot J_N(Q_j) = \overline{S}_{f,Q}(Z) \quad \text{für alle } Z \in \mathcal{Z}(Q).$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \underline{\int_Q} f &= \sup\{\underline{S}_{f,Q}(Z) : Z \in \mathcal{Z}(Q)\} = \sum_{j=1}^{n} c \cdot J_N(Q_j) \\ &= \inf\{\overline{S}_{f,Q}(Z) : Z \in \mathcal{Z}(Q)\} = \overline{\int_Q} f, \end{aligned}$$

und wir erhalten (wie erwartet)

$$\int_Q f = c \cdot \sum_{j=1}^{n} J_N(Q_j) = c \cdot J_N(Q).$$

Analog ergibt sich dasselbe Ergebnis für $c < 0$ und $c = 0$. ◊

Ein Beispiel, in dem Ober- und Unterintegral nicht übereinstimmen, ist die Dirichlet-Funktion (sollte aus Analysis I bekannt sein).

3.7 Korollar: *Besitzt ein Quader Q den N-dimensionalen Inhalt* 0*, so ist jede beschränkte Funktion $f : Q \to \mathbb{R}$ integrierbar und es gilt $\int_Q f = 0$.*

Beweis: Aus $J_N(Q) = 0$ folgt $J_N(Q_j) = 0$ für jeden Teilquader Q_j von Q. Damit folgt unmittelbar die Aussage. □

3.2 Kriterien für Integrierbarkeit

In diesem Abschnitt wollen wir die Menge der integrierbaren Funktionen exakt beschreiben.

Das folgende *Riemann'sche Kriterium* für die Integrierbarkeit einer Funktion ist von fundamentaler Bedeutung.

3.8 Satz: *Eine auf einem Quader $Q \subset \mathbb{R}^N$ beschränkte Funktion $f : Q \to \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung $Z = Z(\varepsilon)$ von Q gibt mit*

$$0 \leq \overline{S}_{f,Q}(Z) - \underline{S}_{f,Q}(Z) < \varepsilon.$$

Beweis: (⇒): Die Funktion f sei integrierbar und $\varepsilon > 0$ sei beliebig. Nach Definition 3.4 gibt es Zerlegungen $Z_1, Z_2 \in \mathcal{Z}(Q)$ mit $0 \leq \int_Q f - \underline{S}_{f,Q}(Z_1) < \frac{\varepsilon}{2}$ und $0 \leq \overline{S}_{f,Q}(Z_2) - \int_Q f < \frac{\varepsilon}{2}$. Daraus folgt

$$0 \leq \overline{S}_{f,Q}(Z_2) - \underline{S}_{f,Q}(Z_1) < \varepsilon.$$

Für die gemeinsame Verfeinerung $Z := Z_1 \cup Z_2$ gilt nach Lemma 3.3(a):

$$0 \leq \overline{S}_{f,Q}(Z) - \underline{S}_{f,Q}(Z) \leq \overline{S}_{f,Q}(Z_2) - \underline{S}_{f,Q}(Z_1) < \varepsilon.$$

(⇐): Trivial. □

Um ein weiteres Integrierbarkeitskriterium zu zeigen, führen wir den Begriff einer Riemann'schen Summe ein.

3.9 Definition: *Gegeben sei ein Quader $Q \subset \mathbb{R}^N$, eine beschränkte Funktion $f : Q \to \mathbb{R}$ und eine Zerlegung Q in n Teilquader $Q_1, \ldots, Q_n$. Für beliebige $r_\nu \in Q_\nu$, $\nu = 1, \ldots, n$, nennt man*

$$R_{f,Q}(Z,r) := \sum_{\nu=1}^{n} f(r_\nu) \cdot J_N(Q_\nu)$$

eine **Riemann'sche Summe** *von f zur Zerlegung Z. Besitzt dabei jeder Teilquader Q_ν nur Kanten mit einer Länge $< \delta$, so nennt man die Zerlegung und die zugehörige Riemann'sche Summe* **δ-fein**.

Offensichtlich gilt für jede Riemann'sche Summe

$$\underline{S}_{f,Q}(Z) \leq R_{f,Q}(Z,r) \leq \overline{S}_{f,Q}(Z). \tag{26}$$

Mit Hilfe Riemann'scher Summen können wir das *Darboux'sche Kriterium* für Integrierbarkeit formulieren.

3.10 Satz: *Eine beschränkte Funktion $f : Q \to \mathbb{R}$ auf einem Quader $Q \subset \mathbb{R}^N$ ist genau dann integrierbar mit $\int_Q f = I$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ gibt, so dass*

$$|R_{f,Q}(Z,r) - I| < \varepsilon$$

für jede δ-feine Riemann'sche Summe $R_{f,Q}(Z,r)$ gilt.

Beweis: Wir beweisen zuerst folgende Hilfsaussage: Ist $\tilde{Z}$ eine beliebige Zerlegung von Q, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ derart, dass für jede δ-feine Zerlegung Z von Q in Teilquader $Q_1, \ldots, Q_m$ Folgendes gilt: Sind $Q_1, \ldots, Q_k$, $k \leq m$, diejenigen Teilquader, die mit dem Inneren von mindestens zwei Teilquadern der Zerlegung $\tilde{Z}$ einen nichtleeren Durchschnitt besitzen, so gilt $\sum_{i=1}^{k} J_N(Q_i) < \varepsilon$.

Aufgrund des Schreibaufwands beweisen wir diese Aussage nur für den Fall $N = 2$. Die Zerlegung $\tilde{Z}$ besitze die Teilpunkte $a_1 < x_1 < \ldots < x_p < b_1$ in der ersten Koordinate und die Teilpunkte $a_2 < y_1 < \ldots < y_q < b_2$ in der zweiten. Die Teilquader $Q_1, \ldots, Q_k$ sind dann in einer Teilmenge von Q enthalten, welche die Vereinigung von höchstens p „vertikalen Streifen" der Höhe $b_2 - a_2$ und einer Breite $\leq \delta$ und höchstens q „horizontalen Streifen" der Breite $b_1 - a_1$ und einer Höhe $\leq \delta$ ist. Folglich gilt

$$\sum_{i=1}^{k} J_N(Q_i) \leq p\delta(b_2 - a_2) + q\delta(b_1 - a_1),$$

aus der sich mit

$$\delta := \frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{p(b_2 - a_2) + q(b_1 - a_1)}$$

die Gültigkeit der Hilfsaussage ergibt. Wir kommen nun zum eigentlichen Beweis des Satzes.

($\Rightarrow$): f sei integrierbar und $\varepsilon > 0$ sei beliebig. Nach Satz 3.8 existiert eine Zerlegung $\tilde{Z} \in \mathcal{Z}(Q)$ mit

$$\overline{S}_{f,Q}(\tilde{Z}) - \underline{S}_{f,Q}(\tilde{Z}) < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{27}$$

Sei $M > 0$ so gewählt, dass $|f(x)| \leq M$ für alle $x \in Q$. Wir wählen nun ein $\delta > 0$ gemäß der Hilfsaussage, so dass für jede δ-feine Zerlegung Z von Q in Teilquader $Q_1, \ldots, Q_k, Q_{k+1}, \ldots, Q_m$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{k} J_N(Q_i) < \frac{\varepsilon}{6M}.$$

Durch die Zerlegung $\hat{Z} := \tilde{Z} \cup Z$ werden dann die Teilquader $Q_{k+1}, \ldots, Q_m$ nicht weiter zerlegt, sondern nur die Teilquader $Q_1, \ldots, Q_k$, etwa in Teilquader $\tilde{Q}_1, \ldots, \tilde{Q}_l$, $l \geq k$. Also gilt

$$\sum_{i=1}^{k} J_N(Q_i) = \sum_{i=1}^{l} J_N(\tilde{Q}_i).$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
\overline{S}_{f,Q}(Z) - \overline{S}_{f,Q}(\hat{Z}) &= \sum_{i=1}^{k} \sup f(Q_i) \cdot J_N(Q_i) + \sum_{i=k+1}^{m} \sup f(Q_i) \cdot J_N(Q_i) \\
&\quad - \sum_{i=1}^{l} \sup f(\tilde{Q}_i) \cdot J_N(\tilde{Q}_i) - \sum_{i=k+1}^{m} \sup f(Q_i) \cdot J_N(Q_i) \\
&\leq M \sum_{i=1}^{k} J_N(Q_i) + M \sum_{i=1}^{l} J_N(\tilde{Q}_i) \\
&= 2M \sum_{i=1}^{k} J_N(Q_i) < \frac{\varepsilon}{3}.
\end{aligned}$$

Analog zeigt man, dass

$$\underline{S}_{f,Q}(\hat{Z}) - \underline{S}_{f,Q}(Z) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Mit (27) folgt für die Verfeinerung $\hat{Z}$ von $\tilde{Z}$ noch $\overline{S}_{f,Q}(\hat{Z}) - \underline{S}_{f,Q}(\hat{Z}) < \frac{\varepsilon}{3}$ und damit

$$\begin{aligned}\overline{S}_{f,Q}(Z) - \underline{S}_{f,Q}(Z) &= \Big(\overline{S}_{f,Q}(Z) - \overline{S}_{f,Q}(\hat{Z})\Big) + \Big(\overline{S}_{f,Q}(\hat{Z}) - \underline{S}_{f,Q}(\hat{Z})\Big) \\ &\quad + \Big(\underline{S}_{f,Q}(\hat{Z}) - \underline{S}_{f,Q}(Z)\Big) < 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Für jede beliebige zu Z gehörige Riemann'sche Summe gilt dann wegen (26):

$$\underline{S}_{f,Q}(Z) \leq \sum_{i=1}^{m} f(x_i) \cdot J_N(Q_i) \leq \overline{S}_{f,Q}(Z)$$

für beliebige $x_i \in Q_i$, $i = 1, \ldots, m$. Da auch $\underline{S}_{f,Q}(Z) \leq I \leq \overline{S}_{f,Q}(Z)$, folgt schließlich

$$\left| \sum_{i=1}^{m} f(x_i) \cdot J_N(Q_i) - I \right| < \varepsilon.$$

($\Leftarrow$): Es genügt zu zeigen, dass

$$\sup\{\underline{S}_{f,Q}(Z) : Z \in \mathcal{Z}(Q)\} = I = \inf\{\overline{S}_{f,Q}(Z) : Z \in \mathcal{Z}(Q)\}.$$

Sei $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung existiert $\delta > 0$, so dass für jede δ-feine Zerlegung Z von Q gilt:

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot J_N(Q_i) - I \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } x_i \in Q_i,\ i = 1, \ldots, n.$$

Wir wählen nun die $x_i \in Q_i$ so, dass

$$|f(x_i) - \sup f(Q_i)| < \frac{\varepsilon}{2nJ_N(Q_i)}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}|\overline{S}_{f,Q}(Z) - I| &\leq \left| \overline{S}_{f,Q}(Z) - \sum_{i=1}^{n} f(x_i) J_N(Q_i) \right| + \left| \sum_{i=1}^{n} f(x_i) J_N(Q_i) - I \right| \\ &< \sum_{i=1}^{n} |\sup f(Q_i) - f(x_i)| J_N(Q_i) + \frac{\varepsilon}{2} < \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2n} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $\inf\{\overline{S}_{f,Q}(Z) : Z \in \mathcal{Z}(Q)\} \leq I$. Analog zeigt man, dass $I \leq \sup\{\underline{S}_{f,Q}(Z) : Z \in \mathcal{Z}(Q)\}$. Damit folgt die Integrierbarkeit von f mit $\int_Q f = I$. □

Mit dem obigen Satz können wir leicht beweisen, dass die Änderung einer integrierbaren Funktion an nur endlich vielen Stellen nichts am Integral der Funktion ändert.

3.11 Beispiel: Gegeben sei ein Quader $Q \subset \mathbb{R}^N$ und ein $x_0 \in Q$. Wir zeigen, dass die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x \in Q \backslash \{x_0\} \\ y_0 \neq 0 & \text{für } x = x_0 \end{cases} \quad , \quad f : Q \to \mathbb{R}$$

integrierbar ist mit $\int_Q f = 0$. Dazu sei $\varepsilon > 0$ beliebig und wir definieren $\delta := \frac{1}{2} \sqrt[N]{\varepsilon / y_0}$. Ist nun Z eine δ-feine Zerlegung von Q in Teilquader $Q_1, \ldots, Q_n$, so kann der Punkt x_0 im Inneren eines dieser Teilquader liegen oder auf dem gemeinsamen Rand benachbarter Teilquader. Im Extremfall liegt x_0 in einer gemeinsamen Ecke von 2^N Teilquadern. Jede beliebige zu Z gehörige Riemann'sche Summe hat also höchstens 2^N von 0 verschiedene Summanden der Form $f(x_0) \cdot J_N(Q_\nu)$ mit $\nu \in \{1, \ldots, n\}$ und ihr Betrag ist damit kleiner als $2^N \delta^N y_0 = \varepsilon$. Nach Satz 3.10 besitzt f also das Integral $\int_Q f = 0$. $\Diamond$

Wir werden zeigen, dass die Integrierbarkeit einer Funktion von der Größe der Menge ihrer Unstetigkeitsstellen abhängt. Um die Größe dieser Menge in der richtigen Art zu messen, benötigen wir folgenden Begriff.

3.12 Definition: *Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^N$ heißt* **Nullmenge** *oder genauer* $\mathbb{R}^{\mathbf{N}}$**-Nullmenge**, *falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ abzählbar viele (d.h. endlich oder abzählbar unendlich viele) Quader Q_i, $i \in I$, mit $J_N(Q_i) > 0$, $i \in I$, gibt mit $A \subset \bigcup_{i \in I} Q_i$ und $\sum_{i \in I} J_N(Q_i) \leq \varepsilon$.*

Beachte: In dem Fall, wenn die Indexmenge I unendlich ist, können wir die Summe $\sum_{i \in I} J_N(Q_i)$ als unendliche Reihe $\sum_{i=1}^\infty J_N(Q_i)$ auffassen, indem wir I mit $\mathbb{N}$ identifizieren. Da $J_N(Q_i) > 0$ für alle i, ist diese Reihe dann absolut konvergent und folglich ist die Reihensumme unabhängig von der Reihenfolge, in der die Inhalte der Quader aufsummiert werden.

3.13 Beispiel: Jede abzählbare Teilmenge $\{a_1, a_2, \ldots\}$ des $\mathbb{R}^N$ ist eine Nullmenge (ÜA). Dazu zählt z.B. auch die Menge $\mathbb{Q}^N$. $\Diamond$

3.14 Beispiel: Wir zeigen, dass $\mathbb{R} \times \{0\}$ eine $\mathbb{R}^2$-Nullmenge ist. Dazu definieren wir zu gegebenem $\varepsilon > 0$:

$$Q_i := [-i, i] \times \left[-\frac{\varepsilon}{2^{i+2} i}, \frac{\varepsilon}{2^{i+2} i} \right], \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Diese Quader bilden offensichtlich eine Überdeckung von $\mathbb{R} \times \{0\}$ und es gilt

$$J_2(Q_i) = 2i \frac{2\varepsilon}{2^{i+2} i} = \frac{\varepsilon}{2^i}, \quad \sum_{i=1}^{\infty} J_2(Q_i) = \varepsilon.$$

$\Diamond$

Man beachte die Dimensionsabhängigkeit des Nullmengenbegriffs, die anhand von obigem Beispiel illustriert wird. Obwohl auf den ersten Blick kaum ein Unterschied zwischen der Menge $\mathbb{R}$ und der Menge $\mathbb{R} \times \{0\}$ besteht, ist erstere keine $\mathbb{R}^1$-Nullmenge.

Folgendes Korollar zeigt, dass man die überdeckenden Quader in der Nullmengendefinition stets als offene Quader wählen kann. Wir lassen den einfachen Beweis aus.[13]

3.15 Korollar: *Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^N$ ist genau dann eine Nullmenge, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ abzählbar viele offene Quader $Q_1, Q_2, \ldots$ gibt mit $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i$ und $\sum_{i=1}^{\infty} J_N(Q_i) \leq \varepsilon$.*

3.16 Satz: *Für Teilmengen von $\mathbb{R}^N$ (N fest gewählt) gilt: Jede Teilmenge einer Nullmenge ist eine Nullmenge und jede abzählbare Vereinigung von Nullmengen ist eine Nullmenge.*

Beweis: Übungsaufgabe. $\square$

Wir sagen, dass eine Eigenschaft **fast überall** in einer Menge $A \subset \mathbb{R}^N$ gilt, falls sie für alle $x \in A \backslash N$ gilt, wobei N eine Nullmenge ist.

Nun können wir das *Lebesgue'sche Kriterium* für Integrierbarkeit formulieren:

3.17 Satz: *Eine auf einem kompakten Quader $Q \subset \mathbb{R}^N$ beschränkte Funktion $f : Q \to \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar, wenn sie fast überall stetig ist.*

Für den Beweis definieren wir die **Oszillation** von f im Punkt $x_0 \in Q$. Das ist die Zahl

$$\Omega(f, x_0) := \inf \{\sup f(B(x_0, \delta) \cap Q) - \inf f(B(x_0, \delta) \cap Q) : \delta > 0\}.$$

3.18 Lemma: *Sei $Q \subset \mathbb{R}^N$ ein kompakter Quader und $f : Q \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann gilt:*

(a) f ist genau dann stetig in $x_0 \in Q$, falls $\Omega(f, x_0) = 0$.

(b) Gilt $\Omega(f, x) < \varepsilon$ für alle $x \in Q$, so gibt es ein $Z \in \mathcal{Z}(Q)$ mit $\overline{S}_{f,Q}(Z) - \underline{S}_{f,Q}(Z) < \varepsilon \cdot J_N(Q)$.

Beweis: (a) f ist genau dann in x_0 stetig, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit $f(B(x_0, \delta) \cap Q) \subset]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[$. Daraus ergibt sich sofort die Äquivalenz zu $\Omega(f, x_0) = 0$.

(b) Zu jedem $x \in Q$ gibt es nach Definition von $\Omega(f, x_0)$ ein $\eta = \eta(x) > 0$ mit

$$\sup f(B(x, \eta) \cap Q) - \inf f(B(x, \eta) \cap Q) < \varepsilon.$$

[13] Beweisidee: Zu einer gegebenen Quaderüberdeckung $\{Q_i\}$ mit $\sum_i J_N(Q_i) \leq \varepsilon/2^N$, ersetze jeden der Quader Q_i durch einen größeren offenen Quader $\tilde{Q}_i$, dessen Kanten doppelt so lang sind wie die von Q_i. Dann folgt $\sum_i J_N(\tilde{Q}_i) \leq \varepsilon$.

Da Q kompakt ist, genügen endlich viele Bälle $B(x_1, \eta_1), \ldots, B(x_0, \eta_p)$ ($\eta_i = \eta(x_i)$) zur Überdeckung von Q. Wählen wir dann eine Zerlegung von Q in Quader $Q_1, \ldots, Q_m$ so fein, dass jeder Quader Q_i ganz in mindestens einer der offenen Mengen $B(x_1, \eta_1), \ldots, B(x_p, \eta_p)$ liegt (siehe Korollar 1.57), so folgt $\sup f(Q_i) - \inf f(Q_i) < \varepsilon$, $i = 1, \ldots, m$. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}\overline{S}_{f,Q}(Z) - \underline{S}_{f,Q}(Z) &= \sum_{i=1}^{m} (\sup f(Q_i) - \inf f(Q_i))\, J_N(Q_i) \\ &< \varepsilon \sum_{i=1}^{m} J_N(Q_i) = \varepsilon \cdot J_N(Q).\end{aligned}$$

□

Beweis von Satz 3.17:

Beweis: Sei $D := \{x \in Q : f \text{ unstetig bei } x\}$.

($\Rightarrow$): f sei integrierbar. Für die Mengen $D_\rho := \{x \in Q : \Omega(f, x) \geq \rho\}$, $\rho > 0$, gilt nach Lemma 3.18 offensichtlich $D_\rho \subset D$ und $D = \bigcup_{i=1}^{\infty} D_{1/i}$. Wegen Satz 3.16 genügt es daher zu zeigen, dass jede der Mengen $D_{1/i}$, $i \in \mathbb{N}$, eine Nullmenge ist. Seien also $i \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert ein Zerlegung $Z \in \mathcal{Z}(Q)$ in Teilquader $Q_1, \ldots, Q_n$ mit

$$\overline{S}_{f,Q}(Z) - \underline{S}_{f,Q}(Z) < \frac{\varepsilon}{i}.$$

Bezeichnen wir nun (nach eventueller Umnummerierung) mit $Q_1, \ldots, Q_k$, $k \leq n$, diejenigen Quader Q_κ der Zerlegung Z, für die $Q_\kappa \cap D_{1/i} \neq \emptyset$, so bedeutet dies zweierlei. Zum einen ist das endliche Quadersystem $\{Q_1, \ldots, Q_k\}$ eine Überdeckung von $D_{1/i}$, und zum anderen gibt es für jedes $\kappa = 1, \ldots, k$ ein $x_\kappa \in Q_\kappa$ mit $\Omega(f, x_\kappa) \geq 1/i$. Nach Definition folgt daraus[14]

$$\sup f(Q_\kappa) - \inf f(Q_\kappa) \geq \frac{1}{i}, \quad \kappa = 1, \ldots, k.$$

Damit gilt dann

$$\begin{aligned}\frac{1}{i} \sum_{\kappa=1}^{k} J_N(Q_\kappa) &\leq \sum_{\kappa=1}^{k} [\sup f(Q_\kappa) - \inf f(Q_\kappa)] J_N(Q_\kappa) \\ &\leq \sum_{\nu=1}^{n} [\sup f(Q_\nu) - \inf f(Q_\nu)] J_N(Q_\nu)\end{aligned}$$

[14] Diese Schlussfolgerung ist etwas problematisch. Falls $x_\kappa \in Q_\kappa^\circ$, funktioniert der Schluss auf jeden Fall. Denn dann gibt es ein $\delta > 0$ mit $B(x_\kappa, \delta) \subset Q_\kappa$ und $\sup f(Q_\kappa) - \inf f(Q_\kappa) \geq \sup f(B(x_\kappa, \delta)) - \inf f(B(x_\kappa, \delta)) \geq \Omega(f, x_0)$. Ist x_κ allerdings ein Randpunkt von Q_κ, so müssen wir uns ein anderes Argument überlegen. Zum Beispiel könnten wir nur diejenigen Quader Q_κ mit $Q_\kappa^\circ \cap D_{1/i} \neq \emptyset$ betrachten und argumentieren, dass man die Unstetigkeitsstellen, die auf dem Rand eines Teilquaders liegen, vernachlässigen kann, da der Rand eine Nullmenge ist.

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\nu=1}^{n} \sup f(Q_\nu) J_N(Q_\nu) - \sum_{\nu=1}^{n} \inf f(Q_\nu) J_N(Q_\nu) \\
&= \overline{S}_{f,Q}(Z) - \underline{S}_{f,Q}(Z) < \frac{\varepsilon}{i}.
\end{aligned}
$$

Insgesamt haben wir damit die Existenz einer (sogar endlichen) Quaderüberdeckung $\{Q_1, \ldots, Q_k\}$ der Menge $D_{1/i}$ nachgewiesen, für die $\sum_{\kappa=1}^{k} J_N(Q_\kappa) < \varepsilon$ gilt. Also ist $D_{1/i}$ eine Nullmenge.

($\Leftarrow$): Die Menge D sei eine Nullmenge. Ferner sei $M > 0$ eine obere Schranke für $|f|$ auf Q und $\varepsilon > 0$ beliebig. Um die Integrierbarkeit von f (mit Hilfe des Riemann'schen Kriteriums) zu zeigen, bestimmen wir eine Zerlegung $Z \in \mathcal{Z}(Q)$ mit $\overline{S}_{f,Q}(Z) - \underline{S}_{f,Q}(Z) < \varepsilon$. Dazu definieren wir $\eta := \varepsilon/(2M + J_N(Q))$ und stellen fest, dass es für die Nullmenge D eine Überdeckung mit offenen Quadern $R_1, R_2, \ldots$ gibt, so dass

$$
\sum_{i=1}^{\infty} J_N(R_i) \leq \eta.
$$

Ferner gibt es zu jedem Punkt $x \in Q \backslash D$ wegen der Stetigkeit von f in x nach Lemma 3.18 einen offenen, x enthaltenden Quader S_x mit

$$
\sup f(S_x \cap Q) - \inf f(S_x \cap Q) < \eta.
$$

Das Mengensystem $\{R_i : i \in \mathbb{N}\} \cup \{S_x : x \in Q \backslash D\}$ ist dann eine offene Überdeckung des kompakten Quaders Q, und folglich gibt es eine endliche Teilüberdeckung $\{R_{i_1}, \ldots, R_{i_p}, S_{x_1}, \ldots, S_{x_q}\}$ von Q. Wir wählen nun eine Zerlegung von $Z \in \mathcal{Z}(Q)$ derart, dass jeder Teilquader dieser Zerlegung ganz in einem der Quader $R_{i_1}, \ldots, R_{i_p}, S_{x_1}, \ldots, S_{x_q}$ liegt, und zwar nummerieren wir die Quader von Z so, dass jeder der ersten k Quader $Q_1, \ldots, Q_k$ in einem der Quader $R_{i_1}, \ldots, R_{i_p}$ enthalten ist, und jeder der restlichen Quader $Q_{k+1}, \ldots, Q_n$ in einem der Quader $S_{x_1}, \ldots, S_{x_q}$. Daraus folgt

$$
\begin{gathered}
\sum_{i=1}^{k} J_N(Q_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} J_N(R_i) \leq \eta \quad \text{und} \\
\sup f(Q_j) - \inf f(Q_j) < \eta \quad \text{für } j = k+1, \ldots, n.
\end{gathered}
$$

Insgesamt erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\overline{S}_{f,Q}(Z) - \underline{S}_{f,Q}(Z) &= \sum_{i=1}^{n} [\sup f(Q_i) - \inf f(Q_i)] J_N(Q_i) \\
&\leq \sum_{i=1}^{k} 2M J_N(Q_i) + \sum_{j=k+1}^{n} [\sup f(Q_j) - \inf f(Q_j)] J_N(Q_j) \\
&< 2M \sum_{i=1}^{k} J_N(Q_i) + \sum_{j=k+1}^{n} \eta J_N(Q_j) \leq 2M\eta + \eta J_N(Q) = \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Damit ist die Integrierbarkeit von f auf Q gezeigt. □

3.3 Eigenschaften integrierbarer Funktionen

In diesem Abschnitt beweisen wir eine Reihe von Eigenschaften des Integrals.

Monotonie des Integrals:

3.19 Satz: *Sind $f, g, h : Q \to \mathbb{R}$ auf einem Quader $Q \subset \mathbb{R}^N$ integrierbar, so gilt:*

(a) *Gilt $f(x) \le g(x)$ für alle $x \in Q$, so folgt $\int_Q f(x)\mathrm{d}x \le \int_Q g(x)\mathrm{d}x$.*

(b) *Gilt $m \le h(x) \le M$ für alle $x \in Q$, so folgt*

$$m \cdot J_N(Q) \le \int_Q h(x)\mathrm{d}x \le M \cdot J_N(Q).$$

Beweis: Folgt unmittelbar aus der Definition des Integrals. (b) ist eine einfache Folgerung aus (a) und Beispiel 3.6. □

Linearität des Integrals:

3.20 Satz: *Gegeben sei ein Quader $Q \subset \mathbb{R}^N$, integrierbare Funktionen $f, g : Q \to \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$. Dann sind auch $f + g$ und $c \cdot f$ integrierbar mit*

$$\int_Q (f(x) + g(x))\mathrm{d}x = \int_Q f(x)\mathrm{d}x + \int_Q g(x)\mathrm{d}x$$

$$\int_Q c \cdot f(x)\mathrm{d}x = c \cdot \int_Q f(x)\mathrm{d}x.$$

Beweis: (i) Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es nach dem Darboux'schen Kriterium (Satz 3.10) $\delta_1, \delta_2 > 0$, so dass für alle δ_1-feinen bzw. δ_2-feinen Zerlegungen von Q in $Q_1, \dots, Q_n$ bzw. $\tilde{Q}_1, \dots, \tilde{Q}_m$ und alle zugehörigen Riemann'schen Summen gilt:

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n} f(r_\nu) J_N(Q_\nu) - \int_Q f\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \left|\sum_{\mu=1}^{m} g(s_\mu) J_N(\tilde{Q}_\mu) - \int_Q g\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mit $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ gilt dann für jede δ-feine Zerlegung von Q in $\hat{Q}_1, \dots, \hat{Q}_k$ und jede zugehörige Riemann'sche Summe:

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{\kappa=1}^{k} [f(t_\kappa) + g(t_\kappa)] J_N(\hat{Q}_\kappa) - \left(\int_Q f + \int_Q g\right)\right| \\
&\quad \le \left|\sum_{\kappa=1}^{k} f(t_\kappa) J_N(\hat{Q}_\kappa) - \int_Q f\right| + \left|\sum_{\kappa=1}^{k} g(t_\kappa) J_N(\hat{Q}_\kappa) - \int_Q g\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Mit Satz 3.10 folgt daraus die Behauptung.

(ii) Einfach (ÜA). □

Integralungleichung:

3.21 Satz: *Gegeben sei eine auf einem kompakten Quader $Q \subset \mathbb{R}^N$ integrierbare Funktion $f : Q \to \mathbb{R}$. Dann ist auch die Funktion $|f|$ integrierbar und*

$$\left| \int_Q f(x) \mathrm{d}x \right| \le \int_Q |f(x)| \mathrm{d}x.$$

Beweis: Ist f stetig in $x \in Q$, so ist auch $|f|$ (als Komposition stetiger Funktionen) in x stetig. Die Menge D der Unstetigkeitsstellen von $|f|$ ist also in der von f enthalten. Nach dem Lebesgue'schen Kriterium ist letztere eine Nullmenge. Also ist auch D eine Nullmenge und $|f|$ ist auf Q integrierbar. Wegen $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$ gilt $-\int_Q |f| \le \int_Q f \le \int_Q |f|$ nach Satz 3.19. Daraus folgt die zu beweisende Ungleichung. □

Mittelwertsatz:

3.22 Satz: *Zu jeder auf einem Quader $Q \subset \mathbb{R}^N$ integrierbaren Funktion $f : Q \to \mathbb{R}$ gibt es ein $\mu \in [\inf f(Q), \sup f(Q)]$ mit*

$$\int_Q f(x) \mathrm{d}x = \mu \cdot J_N(Q).$$

Ist f sogar stetig, so kann man $\mu = f(\xi)$ für ein $\xi \in Q$ wählen.

Beweis: Wir betrachten die Ungleichung

$$\inf f(Q) \cdot J_N(Q) \le \int_Q f(x) \mathrm{d}x \le \sup f(Q) \cdot J_N(Q)$$

und die stetige Funktion $h(t) := t \cdot J_N(Q)$, $h : [\inf f(Q), \sup f(Q)] \to \mathbb{R}$. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es ein μ wie behauptet. Ist f stetig, so kann man den Zwischenwertsatz auf $k(x) := f(x) \cdot J_N(Q)$, $k : Q \to \mathbb{R}$, anwenden und bekommt ein ξ wie behauptet. Falls $\inf f(Q) J_N(Q) < \int_Q f(x) < \sup f(Q) J_N(Q)$, ist das klar. Andernfalls gilt z.B. $\inf f(Q) \cdot J_N(Q) = \int_Q f(x) \mathrm{d}x$, woraus mit der Stetigkeit von f folgt, dass $f(x) = \inf f(Q)$ für alle $x \in Q$, da andernfalls $f(x) > \inf f(Q)$ für alle x aus einer in Q offenen nichtleeren Menge U, woraus $\inf f(Q) \cdot J_N(Q) < \int_Q f(x) \mathrm{d}x$ folgt, ein Widerspruch! □

Additivität des Integrals:

3.23 Satz: *Ein Quader $Q \subset \mathbb{R}^N$ sei zerlegt in Teilquader $Q_1, \ldots, Q_n$. Ist dann eine Funktion $f : Q \to \mathbb{R}$ integrierbar, so ist auch jede ihrer Einschränkungen $f|_{Q_i} : Q_i \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, integrierbar und*

$$\int_Q f(x) \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} \int_{Q_i} f(x) \mathrm{d}x.$$

Beweis: Wie f ist auch jede der Einschränkungen $f|_{Q_i}$ fast überall stetig und somit integrierbar. Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Gemäß Satz 3.10 wählen wir ein

$\delta > 0$ und eine zugehörige δ-feine Zerlegung $Z \in \mathcal{Z}(Q)$, so dass die Teilquader $Q_1, \ldots, Q_n$ weiter zerlegt werden in $Q_{1,1}, \ldots, Q_{1,q_1}$, $Q_{2,1}, \ldots, Q_{2,q_2}$, ..., $Q_{n,1}, \ldots, Q_{n,q_n}$, und dass für eine beliebige zu Z gehörige Riemann'sche Summe gilt:

$$\Big|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{q_i} f(r_{i,j}) \cdot J_N(Q_{i,j}) - \int_Q f\Big| < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\Big|\sum_{i=1}^{q_i} f(r_{i,j}) \cdot J_N(Q_{i,j}) - \int_{Q_i} f|_{Q_i}\Big| \leq \frac{\varepsilon}{2n}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Zusammengefasst erhalten wir

$$\begin{aligned}\Big|\int_Q f - \sum_{i=1}^{n}\int_{Q_i} f|_{Q_i}\Big| &\leq \Big|\int_Q f - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{q_i} f(r_{i,j}) \cdot J_N(Q_{i,j})\Big| \\ &+ \Big|\sum_{i=1}^{n}\Big[\sum_{j=1}^{q_i} f(r_{i,j}) \cdot J_N(Q_{i,j}) - \int_{Q_i} f|_{Q_i}\Big]\Big| < \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\varepsilon}{2n} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, folgt die Behauptung. □

Integration von Funktionenfolgen:

3.24 Satz: *Gegeben sei ein Quader $Q \subset \mathbb{R}^N$ und eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von auf Q integrierbaren Funktionen. Konvergiert diese auf Q gleichmäßig gegen eine Funktion $F : Q \to \mathbb{R}$, so ist F integrierbar und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty}\int_Q f_n(x)\mathrm{d}x = \int_Q \Big[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\Big]\mathrm{d}x = \int_Q F(x)\mathrm{d}x.$$

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir wählen $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $|f_n(x) - F(x)| < \frac{\varepsilon}{2J_N(Q)}$ (o.B.d.A. $J_N(Q) > 0$) und folglich

$$f_n(x) - \frac{\varepsilon}{2J_N(Q)} < F(x) < f_n(x) + \frac{\varepsilon}{2J_N(Q)}$$

für alle $n \geq n_0$ und $x \in Q$. Daraus folgt

$$\begin{aligned}\int_Q f_n(x)\mathrm{d}x - \frac{\varepsilon}{2} &= \int_Q \Big[f_n(x) - \frac{\varepsilon}{2J_N(Q)}\Big]\mathrm{d}x \leq \underline{\int_Q} F \\ &\leq \overline{\int_Q} F \leq \int_Q \Big[f_n(x) + \frac{\varepsilon}{2J_N(Q)}\Big]\mathrm{d}x = \int_Q f_n(x)\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich

$$0 \leq \overline{\int_Q} F - \underline{\int_Q} F < \varepsilon,$$

und folglich ist F integrierbar. Außerdem folgt

$$\left|\int_Q F(x)\mathrm{d}x - \int_Q f_n(x)\mathrm{d}x\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } n \geq n_0,$$

woraus die behauptete Grenzwertbeziehung folgt. $\square$

Parameterabhängige Integrale:

3.25 Satz: *Gegeben sei eine offene Menge $D \subset \mathbb{R}^M$, ein kompakter Quader $Q \subset \mathbb{R}^N$ und eine stetige Funktion $f : D \times Q \to \mathbb{R}$. Dann ist die Funktion*

$$F(x) := \int_Q f(x,y)\mathrm{d}y, \quad F : D \to \mathbb{R}$$

stetig. Existieren zudem die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_\nu}(x,y)$, $\nu = 1,\dots,M$, und sind stetig auf $D \times Q$, so ist F auf D stetig differenzierbar und es gilt die sogenannte **Leibniz'sche Regel***:*

$$\frac{\partial F}{\partial x_\nu}(x) = \int_Q \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(x,y)\mathrm{d}y, \quad \nu = 1,\dots,M.$$

3.26 Bemerkung: Besonders suggestiv ist die Leibniz'sche Regel in der Form

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}\int_Q f(x,y)\mathrm{d}y = \int_Q \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(x,y)\mathrm{d}y, \quad \nu = 1,\dots,M.$$

Beweis: Gilt $J_N(Q) = 0$, so ist $F(x) = 0$ für alle $x \in D$ und die Aussagen des Satzes sind trivialerweise richtig. Wir nehmen nun an, dass $J_N(Q) > 0$.

(i) Zum Nachweis der Stetigkeit von F wählen wir einen beliebigen Punkt $x_0 \in D$, eine kompakte Umgebung U von x_0 in D und ein beliebiges $\varepsilon > 0$. Da f auf der kompakten Menge $U \times Q$ gleichmäßig stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$|f(x,y) - f(x_0,y)| < \frac{\varepsilon}{J_N(Q)} \text{ für alle } x \in B(x_0,\delta),\ y \in Q.$$

Für alle $x \in B(x_0,\delta)$ und $y \in Q$ gilt daher

$$\begin{aligned}|F(x) - F(x_0)| &= \left|\int_Q [f(x,y) - f(x_0,y)]\mathrm{d}y\right| \leq \int_Q |f(x,y) - f(x_0,y)|\mathrm{d}y \\ &\leq J_N(Q)\cdot\sup\{|f(x,y) - f(x_0,y)| : y \in Q\} < \varepsilon.\end{aligned}$$

Damit ist die Stetigkeit von F in x_0 gezeigt.

(ii) Die Aussage bzgl. der ν-ten partiellen Ableitung beweisen wir, indem wir zeigen, dass es zu jedem $x_0 \in D$ und $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit

$$\left|\frac{F(x_0 + te_\nu) - F(x_0)}{t} - \int_Q \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(x_0,y)\mathrm{d}y\right| < \varepsilon$$

für alle $0 \neq t \in]-\delta, \delta[$. Wegen der Stetigkeit von $\frac{\partial f}{\partial x_\nu}(x,y)$ auf $D \times Q$ ist diese Funktion gleichmäßig stetig auf $U \times Q$. Folglich gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $y \in Q$ gilt:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_\nu}(x_0 + te_\nu, y) - \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(x_0, y)\right| < \frac{\varepsilon}{J_N(Q)} \quad \text{für alle } t \in]-\delta, \delta[.$$

Aus dem Mittelwertsatz, angewandt für ein festes $y \in Q$ auf die Hilfsfunktion

$$h(t) := f(x_0 + te_\nu, y) - t \cdot \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(x_0, y), \quad h :]-\delta, \delta[\to \mathbb{R},$$

folgt zunächst für alle $t \in]-\delta, \delta[$, dass

$$|h(t) - h(0)| \leq |t| \cdot \sup\{|h'(s)| : s \in]-\delta, \delta[\},$$

woraus wir folgern können, dass

$$\left|f(x_0 + te_\nu) - f(x_0, y) - t \cdot \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(x_0, y)\right| < |t| \cdot \frac{\varepsilon}{J_N(Q)}.$$

Für alle $0 \neq t \in]-\delta, \delta[$ und $y \in Q$ folgt dann

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{F(x_0 + te_\nu) - F(x_0)}{t} - \int_Q \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(x_0, y)\mathrm{d}y\right| \\
&\quad = \left|\int_Q \Big[\frac{f(x_0 + te_\nu, y) - f(x_0, y)}{t} - \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(x_0, y)\Big]\mathrm{d}y\right| \\
&\quad \leq \int_Q \left|\frac{f(x_0 + te_\nu, y) - f(x_0, y)}{t} - \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(x_0, y)\right|\mathrm{d}y \\
&\quad \leq J_N(Q) \cdot \sup\left\{\left|\frac{f(x_0 + te_\nu, y) - f(x_0, y)}{t} - \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(x_0, y)\right| : y \in Q\right\} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Damit ist die Leibniz'sche Regel bewiesen. Es bleibt noch festzustellen, dass die Stetigkeit der partiellen Ableitungen $\frac{\partial F}{\partial x_\nu}$ aus der Leibniz'schen Regel folgt, denn das Integral $\int_Q \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(x,y)\mathrm{d}y$ hängt wegen der Stetigkeit seines Integranden stetig von x ab. □

3.4 Der Satz von Fubini

Wir wollen uns nun mit der Frage beschäftigen, ob man mehr-dimensionale Integrale auch koordinatenweise berechnen kann und so die Dimension der Integrationsvariablen letztendlich auf 1 reduzieren kann.

Der folgende *Satz von Fubini* (1. Version) liefert uns die Antwort darauf, wann wir ein Integral auf niedrig-dimensionalere Integrale reduzieren können:

3.27 Satz: *Gegeben seien zwei Quader $P \subset \mathbb{R}^M$ und $Q \subset \mathbb{R}^N$ und eine integrierbare Funktion $f : P \times Q \to \mathbb{R}$. Dann sind die beiden auf P definierten Funktionen $x \mapsto \underline{\int_Q} f(x,y)\mathrm{d}y$ und $x \mapsto \overline{\int_Q} f(x,y)\mathrm{d}y$ integrierbar und*

$$\int_{P\times Q} f(x,y)\mathrm{d}(x,y) = \int_P \Big[\underline{\int_Q} f(x,y)\mathrm{d}y\Big]\mathrm{d}x = \int_P \Big[\overline{\int_Q} f(x,y)\mathrm{d}y\Big]\mathrm{d}x.$$

Außerdem sind auch die beiden auf Q erklärten Funktionen $y \mapsto \underline{\int_P} f(x,y)\mathrm{d}x$ und $y \mapsto \overline{\int_P} f(x,y)\mathrm{d}x$ integrierbar und

$$\int_{P\times Q} f(x,y)\mathrm{d}(x,y) = \int_Q \Big[\underline{\int_P} f(x,y)\mathrm{d}x\Big]\mathrm{d}y = \int_Q \Big[\overline{\int_P} f(x,y)\mathrm{d}x\Big]\mathrm{d}y.$$

Ist f sogar stetig, so existieren die Integrale $\int_Q f(x,y)\mathrm{d}y$ für alle $x \in P$ und $\int_P f(x,y)\mathrm{d}x$ für alle $y \in Q$ und

$$\int_{P\times Q} f(x,y)\mathrm{d}(x,y) = \int_P \Big[\int_Q f(x,y)\mathrm{d}y\Big]\mathrm{d}x = \int_Q \Big[\int_P f(x,y)\mathrm{d}x\Big]\mathrm{d}y.$$

Beweis: Wir definieren zunächst für jedes $x \in P$ die Funktion

$$\tilde{f}_x(y) := f(x,y), \quad \tilde{f}_x : Q \to \mathbb{R}$$

und setzen

$$\underline{q}(x) := \underline{\int_Q} \tilde{f}_x(y)\mathrm{d}y, \quad \overline{q}(x) := \overline{\int_Q} \tilde{f}_x(y)\mathrm{d}y, \quad \underline{q}, \overline{q} : P \to \mathbb{R}.$$

Wir geben als nächstes eine Zerlegung $Z_1 \in \mathcal{Z}(P)$ in Teilquader $P_1, \ldots, P_m$ und eine Zerlegung $Z_2 \in \mathcal{Z}(Q)$ in Teilquader $Q_1, \ldots, Q_n$ vor. Dann ist $Z_1 \times Z_2 \in \mathcal{Z}(P \times Q)$ eine Zerlegung in die Teilquader $P_i \times Q_j$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$. Für jedes $i \in \{1, \ldots, m\}$ und $x \in P_i$ gilt dann:

$$\inf f(P_i \times Q_j) \le \inf f(\{x\} \times Q_j) = \inf \tilde{f}_x(Q_j), \ j = 1, \ldots, n,$$

woraus folgt, dass

$$\sum_{j=1}^n \inf f(P_i \times Q_j) J_N(Q_j) \le \sum_{j=1}^n \inf \tilde{f}_x(Q_j) J_N(Q_j) \le \underline{\int_Q} \tilde{f}_x(y)\mathrm{d}y = \underline{q}(x).$$

Daraus folgt wiederum

$$\sum_{j=1}^n \inf f(P_i \times Q_j) J_N(Q_j) \le \inf \underline{q}(P_i), \ i = 1, \ldots, m.$$

Wir erhalten somit

$$\underline{S}_{f,P\times Q}(Z_1 \times Z_2) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \inf f(P_i \times Q_j) J_{M+N}(P_i \times Q_j)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{m} \Big[\sum_{j=1}^{n} \inf f(P_i \times Q_j) J_N(Q_j) \Big] J_M(P_i) \\
&\leq \sum_{i=1}^{m} \inf \underline{q}(P_i) J_M(P_i) = \underline{S}_{\underline{q},P}(Z_1).
\end{aligned}
$$

Analog zeigt man, dass

$$
\overline{S}_{f,P\times Q}(Z_1 \times Z_2) \geq \overline{S}_{\overline{q},P}(Z_1).
$$

Da $\underline{q} \leq \overline{q}$, folgt

$$
\begin{aligned}
\underline{S}_{f,P\times Q}(Z_1 \times Z_2) \leq \underline{S}_{\underline{q},P}(Z_1) &\leq \overline{S}_{\underline{q},P}(Z_1) \\
&\leq \overline{S}_{\overline{q},P}(Z_1) \leq \overline{S}_{f,P\times Q}(Z_1 \times Z_2).
\end{aligned}
$$

Da f nach Voraussetzung integrierbar ist, folgt

$$
\sup \Big\{ \underline{S}_{\underline{q},P}(Z) : Z \in \mathcal{Z}(P) \Big\} = \inf \Big\{ \overline{S}_{\underline{q},P}(Z) : Z \in \mathcal{Z}(P) \Big\} = \int_{P\times Q} f,
$$

und dies bedeutet, dass $\underline{q}$ auf P integrierbar ist und $\int_{P\times Q} f$ als Integral besitzt. Analog folgt die entsprechende Aussage für $\overline{q}$. Die letzte Aussage des Satzes ergibt sich dann unter Beachtung der Tatsache, dass jede Einschränkung einer stetigen Funktion stetig ist. $\square$

Aus einer mehrmaligen Anwendung des obigen Satzes erhalten wir die folgende 2. Version des Satzes von Fubini:

3.28 Satz: *Gegeben sei ein N-dimensionaler Quader $Q(a,b)$ und eine integrierbare Funktion $f : Q(a,b) \to \mathbb{R}$. Dann gilt:*

$$
\int_{Q(a,b)} f(x_1,\ldots,x_N) \mathrm{d}(x_1,\ldots,x_N) = \int_{a_N}^{b_N} \cdots \int_{a_1}^{b_1} f(x_1,\ldots,x_N) \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_N,
$$

sofern die angegebenen iterierten Integrale existieren. Ist f sogar stetig, so ist dies der Fall, und die Reihenfolge der Integrationen darf beliebig vertauscht werden.

3.29 Beispiel: Wir wollen die stetige Funktion $f(x,y) := xy$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ über einem Quader der Form $[0,b]^2$ integrieren:

$$
\begin{aligned}
\int_{[0,b]^2} xy \,\mathrm{d}(x,y) &= \int_0^b \int_0^b xy \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^b \frac{b^2}{2} y \,\mathrm{d}y \\
&= \frac{b^2}{2} \int_0^b y \,\mathrm{d}y = \frac{b^4}{4}.
\end{aligned}
$$

Wir erinnern an dieser Stelle an die aus der Analysis I bekannten Sätze zur Berechnung eindimensionaler Integrale (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, partielle Integration, Integration durch Substitution usw.)

3.5 Jordan-messbare Mengen

Wir wollen nun von den bislang betrachteten Quader zu allgemeineren Mengen übergehen, denen wir eine Maßzahl zuordnen wollen.

Sei dazu $A \subset \mathbb{R}^N$ zunächst eine beliebige Teilmenge, die in einem Quader Q enthalten ist. Ferner sei $Z \in \mathcal{Z}(Q)$ eine Zerlegung in Teilquader $Q_1, \ldots, Q_n$, deren Indizes wir so wählen, dass

$$\begin{aligned} Q_\kappa \subset A \text{ für } \kappa = 1, \ldots, k, \\ Q_\mu \cap A \neq \emptyset \text{ und } Q_\mu \cap (Q \backslash A) \neq \emptyset \text{ für } \mu = k+1, \ldots, m, \\ Q_\nu \subset Q \backslash A \text{ für } \nu = m+1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Für die beiden Summen

$$\underline{\sigma}_{A,Q}(Z) := \sum_{\kappa=1}^{k} J_N(Q_\kappa), \quad \overline{\sigma}_{A,Q}(Z) := \sum_{j=1}^{m} J_N(Q_j),$$

die wir die **innere** bzw. **äußere Quadersumme** von A zur Zerlegung Z nennen, gilt dann offensichtlich

$$\underline{\sigma}_{A,Q}(Z) \leq \overline{\sigma}_{A,Q}(Z) \leq J_N(Q) = \sum_{i=1}^{n} J_N(Q_i).$$

3.30 Definition: *Gegeben sei eine Menge $A \subset \mathbb{R}^N$ und ein N-dimensionaler Quader Q, der A enthält. Die beiden nichtnegativen reellen Zahlen*

$$\begin{aligned} \overline{J}_N(A) &:= \inf\{\overline{\sigma}_{A,Q}(Z) : Z \in \mathcal{Z}(Q)\} \\ \underline{J}_N(A) &:= \sup\{\underline{\sigma}_{A,Q}(Z) : Z \in \mathcal{Z}(Q)\} \end{aligned}$$

(wobei $\underline{J}_N(A) := 0$, falls $\{\underline{\sigma}_{A,Q}(Z) : Z \in \mathcal{Z}(Q)\} = \emptyset$) heißen dann **innerer** *bzw.* **äußerer Jordan-Inhalt** *von A. Stimmen diese beiden Größen überein, so nennen wir die Menge A* **Jordan-messbar**, *und der gemeinsame Wert*

$$J_N(A) := \underline{J}_N(A) = \overline{J}_N(A)$$

heißt N-dimensionaler **Jordan-Inhalt** *oder kurz* **Inhalt** *von A. Zusätzlich definiert man $J_N(\emptyset) := 0$.*

3.31 Bemerkung: Beachte: Der Jordan-Inhalt hängt nicht von der Wahl des Quaders Q ab! Zudem ist diese Definition mit der bereits zuvor verwendeten Notation $J_N(Q)$ für Quadermengen verträglich, wie man leicht sieht.

Der folgende Satz zeigt den engen Zusammenhang zwischen dem Jordan-Inhalt und dem Riemann-Integral.

3.32 Satz: *Eine beschränkte Menge $A \subset \mathbb{R}^N$ ist genau dann Jordan-messbar, wenn für einen (und damit für alle) Quader Q mit $A \subset Q$ die charakteristische Funktion $\chi_A : Q \to \mathbb{R}$ integrierbar ist. In diesem Fall gilt*

$$J_N(A) = \int_Q \chi_A(x)\mathrm{d}x.$$

Beweis: Unter Verwendung der eingangs eingeführten Notation gilt

$$\begin{aligned} \chi_A(Q_\kappa) &= \{1\}, \quad \kappa = 1, \ldots, k, \\ \chi_A(Q_\mu) &= \{0,1\}, \quad \mu = k+1, \ldots, m, \\ \chi_A(Q_\nu) &= \{0\}, \quad \nu = m+1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Man sieht nun leicht, dass

$$\underline{\sigma}_{A,Q}(Z) = \underline{S}_{\chi_A,Q}(Z), \quad \overline{\sigma}_{A,Q}(Z) = \overline{S}_{\chi_A,Q}(Z).$$

Daraus folgt die Aussage. □

3.33 Beispiel: Die Menge $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ ist nicht Jordan-messbar, denn ihre charakteristische Funktion ist die Dirichlet-Funktion.

Da jede abzählbare Menge eine Nullmenge ist, zeigt das obige Beispiel, dass nicht jede Nullmenge Jordan-messbar ist. Dass es dennoch einen engen Zusammenhang zwischen Nullmengen und Mengen mit Jordan-Inhalt 0 gibt, zeigt folgender Satz.

3.34 Satz: *Für jede Menge $A \subset \mathbb{R}^N$ gilt:*

(a) *Ist A Jordan-messbar mit $J_N(A) = 0$, so ist A eine Nullmenge.*

(b) *Ist A eine kompakte Nullmenge, so ist A Jordan-messbar mit $J_N(A) = 0$.*

Beweis: (a) Einfach.

(b) Wir wählen eine offene Quaderüberdeckung von A mit $\sum J_N(Q_i) < \varepsilon$. Da A kompakt ist, können wir eine endliche Teilüberdeckung auswählen, der Quadersumme kleiner als ε ist. Daher gilt $\overline{J}_N(A) < \varepsilon$. Mit $0 \leq \underline{J}_N(A) \leq \overline{J}_N(A) < \varepsilon$ folgt die Behauptung. □

Die Integraldarstellung des Jordan-Inhalts liefert folgende Charakterisierung von Jordan-messbaren Mengen.

3.35 Satz: *Für jede beschränkte Menge $A \subset \mathbb{R}^N$ sind äquivalent:*

(a) *A ist Jordan-messbar.*

(b) *∂A ist eine $\mathbb{R}^N$-Nullmenge.*

(c) ∂A ist Jordan-messbar mit $J_N(A) = 0$.

Beweis: Übungsaufgabe $\square$

Eigenschaften:

3.36 Satz: *Sind $A, B \subset \mathbb{R}^N$ Jordan-messbar, so sind auch $A \cup B$, $A \cap B$ und $A \backslash B$ Jordan-messbar. Zudem gilt:*

(a) $J_N(A \cup B) = J_N(A) + J_N(B) - J_N(A \cap B)$.

(b) $B \subset A \Rightarrow J_N(A \backslash B) = J_N(A) - J_N(B)$.

(c) $B \subset A \Rightarrow J_N(B) \leq J_N(A)$.

Beweis: Die Mengen ∂A und ∂B sind nach Satz 3.35 Nullmengen, also ist auch ihre Vereinigung eine Nullmenge. Die Ränder von $A \cup B$, $A \cap B$ und $A \backslash B$ sind Teilmengen von $\partial A \cup \partial B$ und damit selbst Nullmengen. Also sind die drei betrachteten Mengen Jordan-messbar.

(a) Sei $Q \subset \mathbb{R}^N$ ein kompakter Quader mit $A \cup B \subset Q$. Dann lässt sich Q als disjunkte Vereinigung der Mengen $Q \backslash (A \cup B)$, $A \backslash B$, $B \backslash A$ und $A \cap B$ darstellen. Mittels einer Fallunterscheidung erkennt man, dass

$$\chi_A(x) + \chi_B(x) = \chi_{A \cup B}(x) + \chi_{A \cap B}(x) \quad \text{für alle } x \in Q.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} J_N(A) + J_N(B) &= \int_Q \chi_A + \int_Q \chi_B \\ &= \int_Q (\chi_A + \chi_B) = \int_Q (\chi_{A \cup B} + \chi_{A \cap B}) \\ &= \int_Q \chi_{A \cup B} + \int_Q \chi_{A \cap B} = J_N(A \cup B) + J_N(A \cap B). \end{aligned}$$

(b) Wegen $B \subset A$ zerfällt Q disjunkt in die Mengen $Q \backslash A$, $A \backslash B$ und B. Wie in (a) schließen wir dann zunächst auf die Beziehung $\chi_A = \chi_B + \chi_{A \backslash B}$ und dann weiter auf $J_N(A) = J_N(B) + J_N(A \backslash B)$.

(c) Dies folgt unmittelbar aus (b). $\square$

Nun sind wir in der Lage, die bisher entwickelte Integrationstheorie auf Funktionen zu erweitern, die auf Jordan-messbaren Mengen A definiert sind. Dazu setzen wir eine solche Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ auf einen Quader Q mit $A \subset Q$ fort durch

$$f_A(x) := \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in A, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir bezeichnen f_A als die **triviale Fortsetzung** der Funktion f von A auf Q.

3.37 Definition: *Gegeben sei eine nichtleere, Jordan-messbare Menge $A \subset \mathbb{R}^N$, eine beschränkte Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ und ein kompakter Quader Q mit $A \subset Q$. Die Funktion f heißt* **(Riemann-)integrierbar** *auf A, falls die triviale Fortsetzung f_A von f nach Q integrierbar ist. In diesem Fall heißt*

$$\int_A f := \int_A f(x)\mathrm{d}x = \int_Q f_A(x)\mathrm{d}x$$

(Riemann-)Integral *von f auf A. Zudem definieren wir $\int_\emptyset f := 0$.*

Aus dieser Definition ergeben sich nun zahlreiche Verallgemeinerungen früherer Resultate. Wir halten zunächst fest, dass man den Inhalt einer Jordan-messbaren Mengen nun auch in der Form

$$J_N(A) = \int_A 1\mathrm{d}x$$

schreiben kann.

3.38 Bemerkung: Die Aussagen der Sätze 3.19 (Monotonie), 3.20 (Linearität), 3.22 (Mittelwertsatz)[15] und 3.24 (Funktionenfolgen) lassen sich wörtlich auf den erweiterten Integralbegriff übertragen, indem man die dort auftretenden Quader durch beliebige Jordan-messbaren Mengen ersetzt.

Das Lebesgue'sche Kriterium für Integrierbarkeit für den erweiterten Integralbegriff lautet wie folgt:

3.39 Satz: *Eine auf einer Jordan-messbaren Menge $A \subset \mathbb{R}^N$ beschränkte Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar, wenn sie in A fast überall stetig ist.*

Beweis: $Q \subset \mathbb{R}^N$ sei ein Quader mit $A \subset Q$. Dann ist $f_A : Q \to \mathbb{R}$ beschränkt und ∂A ist eine Nullmenge. Ist D bzw. D_A die Menge der Unstetigkeitsstellen von f in A bzw. f_A in Q, so gilt $D \subset D_A \subset D \cup \partial A$. Daraus ergibt sich die Aussage. □

Additivität des Integrals:

3.40 Satz: *Ist eine reellwertige Funktion f auf den beiden Jordan-messbaren Mengen $A, B \subset \mathbb{R}^N$ integrierbar, so existieren folgende Integrale und es gilt:*

$$\int_{A\cup B} f(x)\mathrm{d}x = \int_A f(x)\mathrm{d}x + \int_B f(x)\mathrm{d}x - \int_{A\cap B} f(x)\mathrm{d}x.$$

Im Fall $B \subset A$ ist f auch auf $A \backslash B$ integrierbar mit

$$\int_{A\backslash B} f(x)\mathrm{d}x = \int_A f(x)\mathrm{d}x - \int_B f(x)\mathrm{d}x.$$

[15] Beachte: Der Teil des Mittelwertsatzes, in dem die Stetigkeit von f vorausgesetzt wird, bleibt nur dann gültig, wenn A als zusammenhängend vorausgesetzt wird.

Beweis: Übungsaufgabe □

3.41 Satz: *Gegeben sei eine Jordan-messbare Menge $D \subset \mathbb{R}^N$ und eine integrierbare Funktion $f : D \to \mathbb{R}$. Ferner sei $C \subset D$ eine Menge mit $J_N(C) = 0$ und $g : D \to \mathbb{R}$ sei eine beschränkte Funktion, die auf $D \backslash C$ mit f übereinstimmt. Dann ist g integrierbar mit*

$$\int_D f(x)\mathrm{d}x = \int_D g(x)\mathrm{d}x.$$

Beweis: Die Einschränkungen von f und g auf C sind integrierbar mit

$$\int_C f = \int_C g = 0,$$

da C eine Nullmenge ist (verwende den Mittelwertsatz). Mit dem vorherigen Satz folgt

$$\int_D f = \int_{D\backslash C} f = \int_{D\backslash C} g = \int_D g.$$

□

3.6 Inhaltsbestimmung

Wir wollen nun mit Hilfe des Integrals die Inhalte für eine große Klasse von Teilmengen des $\mathbb{R}^N$ bestimmen. Wir beginnen mit den sogenannten *Zylindermengen*:

3.42 Satz: *Gegeben sei eine Jordan-messbare Menge $A \subset \mathbb{R}^N$ und zwei integrierbare Funktionen $f, g : A \to \mathbb{R}$ derart, dass $f(x) \geq g(x)$ für alle $x \in A$. Dann ist*

$$M := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} : x \in A,\ g(x) \leq y \leq f(x)\big\}$$

Jordan-messbar mit

$$J_{N+1}(M) = \int_A (f(x) - g(x))\mathrm{d}x.$$

Sind zudem f und g stetig und ist auch A eine Zylindermenge

$$A = \big\{(u,v) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R} : u \in B,\ \varphi(u) \leq v \leq \psi(u)\big\},$$

wobei $B \subset \mathbb{R}^{N-1}$ kompakt und Jordan-messbar ist und $\varphi, \psi : B \to \mathbb{R}$ stetig sind mit $\varphi(u) \leq \psi(u)$ für alle $u \in B$, so gilt:

$$J_{N+1}(M) = \int_B \Big[\int_{\varphi(u)}^{\psi(u)} (f(u,v) - g(u,v))\mathrm{d}v\Big]\mathrm{d}u.$$

Beweis: (i) Als integrierbare Funktionen sind f und g beschränkt, also existieren

$$\underline{\mu} := \inf g(A), \quad \overline{\mu} := \sup f(A).$$

Wir beweisen zunächst die Jordan-Messbarkeit von M, indem wir nachweisen, dass ∂M eine Nullmenge ist. Dazu stellen wir fest, dass ∂M in der Vereinigung folgender Mengen enthalten ist:

$C_1 := \{(x, f(x)) : x \in A\}$, Graph von f, „Deckel" der Zylindermenge M

$C_2 := \{(x, g(x)) : x \in A\}$, Graph von g, „Boden" der Zylindermenge M

$C_3 := \partial A \times [\underline{\mu}, \overline{\mu}]$, „Mantel" der Zylindermenge $A \times [\underline{\mu}, \overline{\mu}]$

$C_4 := \{(x, y) : x \in A$ und $[f$ oder g unstetig bei $x]$ und $y \in [g(x), f(x)]$

Es reicht zu zeigen, dass jede dieser vier Mengen eine Nullmenge ist.

Zu C_1 und C_2: Wählen wir einen beliebigen A umfassenden Quader $Q \subset \mathbb{R}^N$, so lässt sich bei geeigneter Wahl von $Z \in \mathcal{Z}(Q)$ die Differenz $\overline{S}_{f_A,Q}(Z) - \underline{S}_{f_A,Q}(Z)$ beliebig klein machen. Diese Differenz ist aber gerade die Inhaltssumme einer endlichen Quaderüberdeckung im $\mathbb{R}^{N+1}$ des Graphen der trivialen Fortsetzung f_A. Damit ist der Graph von f_A eine Nullmenge und als Teilmenge davon ist auch der Graph von f eine Nullmenge (analoge Argumentation für g).

Zu C_3 und C_4: In beiden Fällen genügt die Aussage, dass das kartesische Produkt einer Nullmenge $D \subset \mathbb{R}^N$ mit einem Intervall $[a, b]$ eine Nullmenge ist (einfach!)

Insgesamt haben wir gezeigt, dass M Jordan-messbar ist.

(ii) Wählen wir einen Quader $Q \subset \mathbb{R}^N$ mit $A \subset Q$, so ist $Q \times [\underline{\mu}, \overline{\mu}]$ ein die Menge M umfassender $(N + 1)$-dimensionaler Quader. Mit dem Satz von Fubini gilt dann

$$\begin{aligned} J_{N+1}(M) &= \int_{Q\times[\underline{\mu},\overline{\mu}]} \chi_M(x, y)\mathrm{d}(x, y) = \int_Q \Big[\overline{\int_{[\underline{\mu},\overline{\mu}]}} \chi_M(x, y)\mathrm{d}y\Big]\mathrm{d}x \\ &= \int_Q \Big[\int_{g_A(x)}^{f_A(x)} 1\mathrm{d}y\Big]\mathrm{d}x = \int_Q [f_A(x) - g_A(x)]\mathrm{d}x = \int_A [f(x) - g(x)]\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

(iii) Unter den zusätzlichen Voraussetzungen bzgl. f, g und A gilt, indem wir

$$\underline{\nu} := \min \varphi(B), \quad \overline{\nu} := \max \psi(B)$$

und $x = (u, v) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}$ setzen, die Beziehung

$$\begin{aligned} &\int_A [f(u, v) - g(u, v)]\mathrm{d}(u, v) = \int_{B\times[\underline{\nu},\overline{\nu}]} [f_A(u, v) - g_A(u, v)]\mathrm{d}(u, v) \\ &= \int_B \Big[\overline{\int_{[\underline{\nu},\overline{\nu}]}} [f_A(u, v) - g_A(u, v)]\mathrm{d}v\Big]\mathrm{d}u = \int_B \Big[\int_{\varphi(u)}^{\psi(u)} [f(u, v) - g(u, v)]\mathrm{d}v\Big]\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

□

3.43 Beispiel: Um den Inhalt der Halbkugel

$$M := \{(u, v, y) \in \mathbb{R}^3 : u^2 + v^2 \leq 1,\ 0 \leq y \leq \sqrt{1 - u^2 - v^2}\}$$

mit Hilfe von Satz 3.42 zu berechnen, wählen wir $B := [-1, 1]$, $\varphi(u) := -\sqrt{1 - u^2}$, $\psi(u) := \sqrt{1 - u^2}$ und $f(u, v) := \sqrt{1 - u^2 - v^2}$. Wir erhalten damit

$$\begin{aligned} J_3(M) &= \int_{-1}^{1} \Big[\int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} \sqrt{1 - u^2 - v^2}\,\mathrm{d}v\Big]\mathrm{d}u \\ &= \int_{-1}^{1} \Big[(1 - u^2)\frac{\pi}{2}\Big]\mathrm{d}u = \frac{\pi}{2}\Big(u - \frac{u^3}{3}\Big)\Big|_{-1}^{1} = \frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$

Zur Berechnung des inneren Integrals (mittels Substitution):

$$\begin{aligned} \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_{\pi}^{0} \sqrt{r^2 - r^2\cos^2 u}(-r\sin u)\,\mathrm{d}u \\ &= r^2 \int_0^{\pi} \sin^2 u\,\mathrm{d}u = \frac{r^2\pi}{2}. \end{aligned}$$

Dabei verwenden wir, dass

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \sin^2 u\,\mathrm{d}u &= -\sin u\cos u\big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (-\cos u)\cos u\,\mathrm{d}u \\ &= \int_0^{\pi} (1 - \sin^2 u)\mathrm{d}u = \pi - \int_0^{\pi} \sin^2 u\,\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

Im nächsten Satz, der das sogenannte **Prinzip von Cavalieri** beschreibt, präzisieren wir die schon im Satz von Fubini verwendete Idee, den Inhalt eines Raumkörpers „scheibchenweise" zu bestimmen.

3.44 Satz: *Gegeben sei ein Intervall $[a, b]$ und eine Jordan-messbare Menge $M \subset \mathbb{R}^{N+1}$ mit der Eigenschaft, dass für alle Punkte $(x_1, \ldots, x_{N+1}) \in M$ die letzte Koordinate der Beziehung $a \leq x_{N+1} \leq b$ genügt. Ist dann für jedes $\xi \in [a, b]$ die Schnittmenge*

$$\tilde{M}(\xi) := \big\{(x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N : (x_1, \ldots, x_N, \xi) \in M\big\}$$

Jordan-messbar, so ist die für alle $\xi \in [a, b]$ erklärte Funktion $\xi \mapsto J_N(\tilde{M}(\xi))$ integrierbar mit

$$J_{N+1}(M) = \int_a^b J_N(\tilde{M}(\xi))\mathrm{d}\xi.$$

Beweis: Sei $Q \subset \mathbb{R}^N$ ein Quader mit $M \subset Q \times [a, b]$. Für jedes $\xi \in [a, b]$ gilt dann

$$\chi_{\tilde{M}(\xi)}(x_1, \ldots, x_N) = \chi_M(x_1, \ldots, x_N, \xi) \quad \text{für alle } (x_1, \ldots, x_N) \in Q,$$

und daraus folgt

$$\begin{aligned} J_N(\tilde{M}(\xi)) &= \int_Q \chi_{\tilde{M}(\xi)}(x_1,\dots,x_N)\mathrm{d}(x_1,\dots,x_N) \\ &= \int_Q \chi_M(x_1,\dots,x_N,\xi)\mathrm{d}(x_1,\dots,x_N). \end{aligned}$$

Mit dem Satz von Fubini ergibt sich

$$\begin{aligned} J_{N+1}(M) &= \int_{Q\times[a,b]} \chi_M(x_1,\dots,x_{N+1})\mathrm{d}(x_1,\dots,x_{N+1}) \\ &= \int_{[a,b]} \Big[\int_Q \chi_M(x_1,\dots,x_N,\xi)\mathrm{d}(x_1,\dots,x_N)\Big]\mathrm{d}\xi = \int_{[a,b]} J_N(\tilde{M}(\xi))\mathrm{d}\xi. \end{aligned}$$

□

3.7 Der Transformationssatz

Dieser Abschnitt ist der Verallgemeinerung der Substitutionsregel auf Funktionen mit mehrdimensionalem Definitionsbereich gewidmet. Zur Erinnerung: Ist $g:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ eine injektive C^1-Funktion, so gilt für jede integrierbare Funktion $f: g([\alpha,\beta])\to\mathbb{R}$:

$$\int_{g([\alpha,\beta])} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{[\alpha,\beta]} f(g(u))|g'(u)|\,\mathrm{d}u.$$

Die Verallgemeinerung dieser Formel lautet wie folgt (**Transformationssatz**):

3.45 Satz: *Gegeben sei eine offene Menge $D\subset\mathbb{R}^N$ und eine injektive C^1-Funktion $g: D\to\mathbb{R}^N$ mit $\det \mathrm{D}g(u)\neq 0$ für alle $u\in D$. Ferner sei A eine kompakte, Jordan-messbare Teilmenge von D. Dann ist $g(A)$ Jordan-messbar mit $J_N(g(A)) = \int_A |\det \mathrm{D}g(u)|\mathrm{d}u$ und für jede stetige Funktion $f: g(A)\to\mathbb{R}$ gilt*

$$\int_{g(A)} f(x)\mathrm{d}x = \int_A f(g(u))|\det \mathrm{D}g(u)|\mathrm{d}u.$$

3.46 Beispiel: Wir betrachten die sog. *Zylinderkoordinaten*:

$$g(r,\varphi,z) := (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z), \quad g:[0,\infty[\times]0,2\pi[\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3.$$

Die Funktion g ist offensichtlich eine injektive C^1-Funktion und es gilt

$$\det \mathrm{D}g(r,\varphi,z) = \det\begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = r > 0.$$

Wir betrachten $A := [r_1, r_2] \times [\varphi_1, \varphi_2] \times [z_1, z_2] \subset]0, \infty[\times]0, 2\pi[\times\mathbb{R}$. Ist nun $f : g(A) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so gilt nach dem Transformationssatz

$$\int_{g(A)} f(x, y, z)\mathrm{d}(x, y, z) = \int_A f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) r\,\mathrm{d}(r, \varphi, z).$$

Mit dem Satz von Fubini folgt hieraus die Formel

$$\int_{g(A)} f(x, y, z)\mathrm{d}(x, y, z) = \int_{x_1}^{x_2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int_{r_1}^{r_2} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z,$$

bei der man die Integrationsreihenfolge auf der rechten Seite beliebig vertauschen darf.

3.47 Beispiel: Wir betrachten die sogenannten *Kugelkoordinaten*, bei denen man jeden Punkt im $\mathbb{R}^3$ durch seinen Abstand zum Koordinatenursprung und zwei Winkel beschreibt, nämlich die „geographische Länge" und die „geographische Breite". Die zugehörige Transformation

$$h(r, \varphi, \vartheta) := (r\cos\varphi\cos\vartheta, r\sin\varphi\cos\vartheta, r\sin\vartheta)$$

$$h :]0, \infty[\times]0, 2\pi[\times\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}^3$$

ist, wie man leicht bestätigt, injektiv. Mit der Entwicklung der Determinante nach der letzten Zeile gilt

$$\begin{aligned}\det \mathrm{D}h(r, \varphi, \vartheta) &= \det\begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\vartheta & -r\sin\varphi\cos\vartheta & -r\cos\varphi\sin\vartheta \\ \sin\varphi\cos\vartheta & r\cos\varphi\cos\vartheta & -r\sin\varphi\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & 0 & r\cos\vartheta \end{pmatrix} \\ &= r^2\sin^2\vartheta\cos\vartheta + r^2\cos^3\vartheta \\ &= r^2\cos\vartheta > 0.\end{aligned}$$

Für $A := [r_1, r_2] \times [\varphi_1, \varphi_2] \times [\vartheta_1, \vartheta_2] \subset]0, \infty[\times]0, 2\pi[\times] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ gilt dann

$$\begin{aligned}&\int_{h(A)} f(x, y, z)\mathrm{d}(x, y, z) \\ &= \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int_{r_1}^{r_2} f(r\cos\varphi\cos\vartheta, r\sin\varphi\cos\vartheta, r\sin\vartheta) r^2\cos\vartheta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\vartheta,\end{aligned}$$

wobei man die Reihenfolge der Integration wieder beliebig abändern darf.

Erklärung der Formel für h: Wir können $h(r, \varphi, \vartheta)$ schreiben als

$$h(r, \varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r\cos\vartheta \\ 0 \\ r\sin\vartheta \end{pmatrix}.$$

Für festes $r > 0$ und variables $\vartheta \in]-\pi/2, \pi/2[$ beschreibt der Spaltenvektor auf der rechten Seite einen Halbkreis in der x-z-Ebene mit Radius r und Mittelpunkt 0. Die 3×3-Matrix, mit der dieser Vektor multipliziert wird, beschreibt eine Rotation in der x-y-Ebene um den Winkel φ. Läuft dabei φ von 0 bis 2π, so erhalten wir eine Kugel mit Radius r.

3.8 Kurvenintegrale

Wir untersuchen in diesem Abschnitt einen Integralbegriff, der sich in zweifacher Hinsicht vom bisher betrachteten Riemann-Integral unterscheidet. Der Integrand ist nicht mehr reell-, sondern vektorwertig und der Integrationsbereich ist eine Kurve.

Eine auf einem Intervall definierte C^1-Funktion $\gamma : I \to \mathbb{R}^N$, deren Ableitung nirgends verschwindet, heißt **glatte Kurve**. Eine **stückweise glatte Kurve** oder ein **Weg** ist eine stetige Funktion $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^N$, so dass es eine Zerlegung $a = u_0 < u_1 < \ldots < u_n = b$ von $[a,b]$ mit der Eigenschaft gibt, dass jede der Einschränkungen $\gamma_{|[u_{i-1},u_i]}$, $i = 1,\ldots,n$, eine glatte Kurve ist.

3.48 Beispiel: Die Abbildung

$$\gamma(u) := (\cos^3 u, \sin^3 u), \quad \gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$$

beschreibt eine sogenannte **Hypozykloide**. Obwohl γ eine C^1-Funktion ist, handelt es sich dabei nicht um eine glatte, sondern nur um eine stückweise glatte Kurve. Wegen der Beziehung $\gamma'(u) = (-3\cos^2 u \sin u, 3\sin^2 u \cos u)$ gilt nämlich

$$\gamma'(u) = (0,0) \quad \Leftrightarrow \quad u \in \Big\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\Big\}.$$

Man beachte, dass das Bild einer C^1-Funktion durchaus „Ecken“ besitzen kann, aber nur in Punkten $\gamma(c)$ mit $\gamma'(c) = 0$.

3.49 Definition: *Gegeben sei eine stückweise glatte Kurve $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ und eine stetige Funktion $f : \gamma([a,b]) \to \mathbb{R}^N$. Die reelle Zahl*

$$\int_\gamma \langle f(x), \mathrm{d}x\rangle := \int_\gamma f(x)\cdot \mathrm{d}x := \int_a^b \langle f(\gamma(u)), \gamma'(u)\rangle \mathrm{d}u$$

heißt dann **Kurvenintegral** *von f längs γ.*

3.50 Beispiel: Wir wollen die Funktion

$$f(x,y) := (xy, y-x), \quad f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

längs zweier verschiedener Wege mit dem Anfangspunkt $(0,0)$ und dem Endpunkt $(1,1)$ integrieren. Die beiden Wege sind

$$\begin{aligned} \gamma(u) &:= (u, u^2), \quad \gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \\ \delta(u) &:= (u^2, u), \quad \delta : [0,1] \to \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Wir erhalten $\gamma'(u) = (1, 2u)$ und $\delta'(u) = (2u, 1)$. Folglich gilt

$$\int_\gamma xy\,\mathrm{d}x + (y-x)\,\mathrm{d}y = \int_0^1 (u^3 + (u^2-u)2u)\mathrm{d}u = \int_0^1 (3u^3 - 2u^2)\mathrm{d}u = \frac{1}{12},$$

$$\int_\delta xy\,\mathrm{d}x + (y-x)\,\mathrm{d}y = \int_0^1 (u^3 \cdot 2u + (u-u^2))\mathrm{d}u = \int_0^2 (2u^4 - u^2 + u)\mathrm{d}u = \frac{17}{30}.$$

Wir stellen fest, dass die verschiedenen Wege unterschiedliche Resultate liefern, dass der Wert des Kurvenintegrals also nicht nur vom Anfangs- und Endpunkt der Kurve abhängt.

Umparametrisierung von Kurvenintegralen:

3.51 Satz: *Gegeben sei ein Weg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ und eine stetige Funktion $f : \gamma([a,b]) \to \mathbb{R}^N$, ferner eine bijektive C^1-Funktion $\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$. Dann ist auch $\delta := \gamma \circ \varphi : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}^N$ ein Weg und*

$$\int_\delta \langle f(x), \mathrm{d}x\rangle = \begin{cases} \int_\gamma \langle f(x), \mathrm{d}x\rangle & \text{falls } \varphi(\alpha) = a,\ \varphi(\beta) = b, \\ -\int_\gamma \langle f(x), \mathrm{d}x\rangle & \text{falls } \varphi(\alpha) = b,\ \varphi(\beta) = a. \end{cases}$$

Beweis: Unter Beachtung von $\delta'(v) = \gamma'(\varphi(v))\varphi'(v)$ und der Substitutionsregel gilt

$$\begin{aligned} \int_\delta \langle f(x), \mathrm{d}x\rangle &= \int_\alpha^\beta \langle f(\delta(v)), \delta'(v)\rangle \mathrm{d}v = \int_\alpha^\beta \langle f(\gamma(\varphi(v))), \gamma'(\varphi(v))\varphi'(v)\rangle \mathrm{d}v \\ &= \int_\alpha^\beta \langle f(\gamma(\varphi(v))), \gamma'(\varphi(v))\rangle \varphi'(v)\mathrm{d}v = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} \langle f(\gamma(u)), \gamma'(u)\rangle \mathrm{d}u. \end{aligned}$$

Daraus folgt nun leicht die Aussage. □

Wir wollen nun die Frage beantworten, unter welchen Bedingungen das Kurvenintegral $\int_\gamma \langle f(x), \mathrm{d}x\rangle$ nur vom Anfangs- und Endpunkt des Weges γ abhängt. Wir gehen hierbei davon aus, dass f auf einem Gebiet (also einer offenen und zusammenhängenden Menge) definiert ist.

3.52 Definition: *Gegeben sei ein Gebiet $G \subset \mathbb{R}^N$. Eine stetige Funktion $f : G \to \mathbb{R}^N$ heißt dann* **in G wegunabhängig integrierbar**, *wenn für je zwei beliebige Punkte $p, q \in G$ alle Kurvenintegrale $\int_\gamma \langle f(x), \mathrm{d}x\rangle$ längs beliebiger Wege $\gamma : [a,b] \to G$ mit $\gamma(a) = p$ und $\gamma(b) = q$ den gleichen Wert besitzen. Ist dies der Fall, so bezeichnen wir diesen Wert mit*

$$\int_p^q \langle f(x), \mathrm{d}x\rangle$$

und nennen das Kurvenintegral von f **in G wegunabhängig**.

3.53 Satz: *Ist $G \subset \mathbb{R}^N$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{R}^N$ stetig, so ist f genau dann in G wegunabhängig integrierbar, wenn f eine (in ganz G existierende) Stammfunktion besitzt. Ist dies der Fall, so gilt:*

(a) Für beliebiges $x_0 \in G$ ist die Funktion

$$F(x) := \int_{x_0}^{x} \langle f(\xi), \mathrm{d}\xi \rangle, \quad F : G \to \mathbb{R} \tag{28}$$

eine Stammfunktion von f.

(b) Für jeden Weg $\gamma : [a,b] \to G$ gilt

$$\int_\gamma \langle f(\xi), \mathrm{d}\xi \rangle = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Hierbei ist F eine beliebige Stammfunktion von f.

Den obigen Satz kann man als eine Art Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung für Funktionen mit mehrdimensionalem Definitionsbereich betrachten.

Beweis: ($\Rightarrow$): Das Kurvenintegral von f sei in G wegunabhängig. Dann ist die Funktion (28) wohldefiniert und der Beweis von $\mathrm{grad} F(x) = f(x)$ reduziert sich auf den Nachweis von

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x + he_i) - F(x)}{h} = f_i(x) \quad \text{für alle } x \in G,\ i = 1, \ldots, N.$$

Dazu fixieren wir zunächst einen Punkt $x \in G$, ein $i \in \{1, \ldots, N\}$ und ein $r > 0$ mit $B(x,r) \subset G$. Für beliebiges $h \in \mathbb{R}$ mit $|h| < r$ betrachten wir dann

$$\frac{F(x + he_i) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \left[\int_{x_0}^{x + he_i} \langle f(\xi), \mathrm{d}\xi \rangle - \int_{x_0}^{x} \langle f(\xi), \mathrm{d}\xi \rangle \right]. \tag{29}$$

Als Integrationsweg des zweiten Integrals wählen wir nun einen beliebigen Weg $\gamma : [-1, 0] \to G$ von x_0 nach x. Diesen ergänzen wir durch einen geradlinigen Weg von x nach $x + he_i$, so dass der Integrationsweg des ersten Integrals die folgende Form besitzt:

$$\delta(u) := \begin{cases} \gamma(u) & \text{für } u \in [-1, 0] \\ x + uhe_i & \text{für } u \in [0, 1] \end{cases}, \quad \delta : [-1, 1] \to G.$$

Weil $\delta'(u) = he_i$ für alle $u \in]0, 1[$, hat der Ausdruck (29) die Form

$$\begin{aligned} &\frac{1}{h} \left[\int_{-1}^{1} \langle f(\delta(u)), \delta'(u) \rangle \mathrm{d}u - \int_{-1}^{0} \langle f(\gamma(u)), \gamma'(u) \rangle \mathrm{d}u \right] \\ &= \frac{1}{h} \int_0^1 \langle f(\delta(u)), \delta'(u) \rangle \mathrm{d}u = \int_0^1 f_i(x + uhe_i) \mathrm{d}u. \end{aligned}$$

Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung gibt es dann ein $\xi \in [0, 1]$, so dass das letzte Integral gleich $f_i(x + \xi he_i)$ ist. Insgesamt ergibt sich

$$\frac{F(x + he_i) - F(x)}{h} = f_i(x + \xi he_i),$$

woraus sich die zu beweisende Aussage unter Verwendung der Stetigkeit von f_i ergibt.

($\Leftarrow$): Gegeben sei eine Stammfunktion F von f und ein Weg $\gamma : [a,b] \to G$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\int_\gamma \langle f(\xi), \mathrm{d}\xi\rangle &= \int_a^b \langle f(\gamma(u)), \gamma'(u)\rangle \mathrm{d}u = \int_a^b \langle \mathrm{grad} F(\gamma(u)), \gamma'(u)\rangle \mathrm{d}u \\ &= \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} F(\gamma(u))\mathrm{d}u = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).\end{aligned}$$

Damit ist der Satz vollständig bewiesen. □

Wir wollen uns nun der Frage zuwenden, wann eine gegebene Funktion eine Stammfunktion besitzt. Wie wir bereits aus Abschnitt 2.9 wissen, ist die Integrabilitätsbedingung notwendig, aber nicht hinreichend für die Existenz einer Stammfunktion.

Wir nennen ein Gebiet $G \subset \mathbb{R}^N$ ein **Sterngebiet**, falls es einen Punkt $z \in G$ (das sogenannte **Zentrum** des Sterngebiets), so dass mit jedem Punkt $x \in G$ die gesamte Strecke $\mathrm{Str}[x,z]$ in G liegt. Offensichtlich sind alle konvexen Gebiete Sterngebiete, aber nicht nur diese.

3.54 Satz: *Gegeben sei ein Gebiet $G \subset \mathbb{R}^N$ und eine C^1-Funktion $f : G \to \mathbb{R}^N$. Dann ist die die Integrabilitätsbedingung*

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) \quad \text{für alle } x \in G \text{ und } i,j = 1,\dots,N$$

notwendig für die Existenz einer Stammfunktion von f auf G. Ist G ein Sterngebiet, so ist sie auch hinreichend.

Beweis: Es genügt zu zeigen, dass f eine Stammfunktion besitzt, falls die Integrabilitätsbedingung erfüllt ist und G ein Sterngebiet ist. Der Beweis dieser Aussage beruht auf der Idee, eine Stammfunktion $F : G \to \mathbb{R}$ von f dadurch zu konstruieren, dass man jedem Punkt $x \in G$ den Wert des Kurvenintegrals von f längs der Strecke $\mathrm{Str}[x,z]$ zuweist. Diese Idee realisieren wir mittels der Funktion

$$\begin{aligned} F(x) &:= \int_0^1 k(x,u)\,\mathrm{d}u, \quad F : G \to \mathbb{R}, \text{ wobei} \\ k(x,u) &:= \sum_{i=1}^N f_i(z + u(x-z))(x_i - z_i), \quad k : G \times [0,1] \to \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Da die Funktion k und ihre partiellen Ableitungen $\frac{\partial k}{\partial x_i}(x,u)$, $i = 1,\dots,N$, auf $G \times [0,1]$ stetig sind, ist die Leibniz'sche Regel (Satz 3.25) anwendbar. Folglich existieren alle partiellen Ableitungen von F und

$$\frac{\partial F}{\partial x_\nu}(x) = \int_0^1 \frac{\partial k}{\partial x_\nu}(x,u)\,\mathrm{d}u, \quad \nu = 1,\dots,N. \tag{30}$$

Um diese Beziehung weiter auszuwerten, schreiben wir den Integranden in der Form

$$\frac{\partial k}{\partial x_\nu}(x,u) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f_i}{\partial x_\nu}(z+u(x-z))u(x_i-z_i) + f_\nu(z+u(x-z))$$

und schließen weiter, dass wegen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left[uf_\nu(z+u(x-z))\right] = f_\nu(z+u(x-z)) + u\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f_\nu}{\partial x_i}(z+u(x-z))(x_i-z_i)$$

und der Integrabilitätsbedingung die Identität

$$\frac{\partial k}{\partial x_\nu}(x,u) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left[uf_\nu(z+u(x-z))\right] \quad \text{für alle } (x,u) \in G \times [0,1]$$

gilt. Zusammen mit (30) erhalten wir für $\nu = 1,\ldots,N$:

$$\frac{\partial F}{\partial x_\nu}(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left[uf_\nu(z+u(x-z))\right]\mathrm{d}u = uf_\nu(z+u(x-z))\Big|_0^1 = f_\nu(x).$$

Damit ist der Satz bewiesen. □

3.55 Beispiel: Da die Funktion

$$f(x_1,x_2) := \big(x_2\mathrm{e}^{x_1}(1+x_1), x_1\mathrm{e}^{x_1}\big), \quad f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

auf dem gesamten $\mathbb{R}^2$ die Integrabilitätsbedingung erfüllt, und da der $\mathbb{R}^2$ offensichtlich ein Sterngebiet ist, hat f eine auf ganz $\mathbb{R}^2$ definierte Stammfunktion, die durch

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} \langle f(\xi), \mathrm{d}\xi\rangle$$

berechnet werden kann. Um die Abhängigkeit des Rechenaufwands vom gewählten Integrationsweg deutlich zu machen, wählen wir drei naheliegende Wege von $(0,0)$ nach (x_1,x_2):

Der geradlinige „Diagonalweg“ mit der Parametrisierung

$$\gamma(u) := ux = (ux_1, ux_2), \quad \gamma:[0,1] \to \mathbb{R}^2$$

führt auf das recht komplizierte Integral

$$\int_\gamma \langle f(x), \mathrm{d}x\rangle = \int_0^1 \langle f(ux,x)\mathrm{d}u = \int_0^1 (2ux_1x_2 + u^2x_1^2x_2)\mathrm{e}^{ux_1}\mathrm{d}u.$$

Wir betrachten als nächstes den Integrationsweg, der vom Punkt $(0,0)$ vertikal nach $(0,x_2)$ verläuft und dann von dort horizontal zum Punkt (x_1,x_2). Dieser stückweise glatte, mit φ bezeichnete, Weg setzt sich aus den beiden glatten Wegen

$$\varphi_1(u) := (0, ux_2) \quad \text{und} \quad \varphi_2(u) = (ux_1, x_2), \quad \varphi_i : [0,1] \to \mathbb{R}^2$$

zusammen und führt zu

$$\int_\varphi \langle f(x), \mathrm{d}x \rangle = \int_{\varphi_1} \langle f(x), \mathrm{d}x \rangle + \int_{\varphi_2} \langle f(x), \mathrm{d}x \rangle = \int_0^1 (x_1 x_2 + u x_1^2 x_2) \mathrm{e}^{u x_1} \mathrm{d}u.$$

Schließlich betrachten wir den Integrationsweg, der horizontal von $(0,0)$ nach $(x_1, 0)$ verläuft und dann vertikal weiter nach (x_1, x_2). Für diesen mit ψ bezeichneten Wege erhalten wir mit Hilfe der beiden Teilwege

$$\psi_1(u) := (ux_1, 0) \quad \text{und} \quad \psi_2(u) := (x_1, ux_2), \quad \psi_i : [0,1] \to \mathbb{R}^2$$

die gesuchte Stammfunktion in der Form

$$\int_\psi \langle f(x), \mathrm{d}x \rangle = \int_{\psi_1} \langle f(x), \mathrm{d}x \rangle + \int_{\psi_2} \langle f(x), \mathrm{d}x \rangle = \int_0^1 x_1 x_2 \mathrm{e}^{x_1} \mathrm{d}u = x_1 x_2 \mathrm{e}^{x_1}.$$

Bemerkenswerterweise ist bei dem zuletzt gewählten Integrationsweg die Auswertung des Integrals völlig trivial. Der Rechenaufwand bei der Berechnung einer Stammfunktion hängt also wesentlich vom gewählten Integrationsweg ab.