

Nachweis topologischer Konjugiertheit mittels
Fixpunktmethoden

Diplomarbeit
von
Christoph Kawan

eingereicht beim
Institut für Mathematik
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Augsburg
Juli 2006

Erstgutachter: Prof. Dr. Fritz Colonius
Zweitgutachter: Prof. Dr. Jost-Hinrich Eschenburg

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	3
1 Topologische Dynamik	7
1.1 Grundbegriffe	7
1.2 Topologische Konjugation	12
2 Funktionenräume und Homöomorphismengruppen	17
2.1 Topologische und metrische Funktionenräume	17
2.2 Homöomorphismengruppen	21
3 Überlagerungen	25
3.1 Normale Projektionen und Liftungen	25
3.2 Universelle Überlagerung und Selbstüberlagerungen	33
3.3 Metrisierbarkeit von Liftungsräumen	37
3.4 Expandierende Abbildungen	39
4 Kombinatorisch äquivalente Systeme	57
4.1 Definition und Eigenschaften	57
4.2 Konstruktion kombinatorisch äquivalenter Systeme	61
4.2.1 Systeme stückweise monotoner Intervallabbildungen . . .	62
4.2.2 Systeme von Überlagerungen kompakter Hausdorffräume	69
5 Konjugationsresultate	79
5.1 Nachweis expandierender Abbildungen	79
5.2 Konjugiertheit von Intervallabbildungen	90
5.3 Konjugiertheit expandierender Abbildungen	95

Ausblick	105
Anhang	107
A.1 Mengentheoretische Topologie	107
A.2 Überlagerungstheorie	116
A.3 Simplicialkomplexe	122
A.4 Längenräume	124
A.5 Mannigfaltigkeiten und Orbifaltigkeiten	125
A.6 Dynamik linearer Abbildungen	127
Literaturverzeichnis	129
Notation	131
Index	134

Einleitung

Wichtige Teileaspekte der qualitativen Theorie dynamischer Systeme sind die Klassifikation von Systemen, die Bestimmung von Normalformen und das Finden von Kriterien für die Stabilität eines Systems. Bei diesen Aufgaben spielt der Begriff der *topologischen Konjugiertheit*, der die Gleichheit zweier Systeme bis auf umkehrbar stetigen Koordinatenwechsel beschreibt, eine wichtige Rolle. Das Hauptziel dieser Arbeit ist es, mit topologischen und geometrischen Hilfsmitteln Kriterien für die Äquivalenz – genauer: die kombinatorische Äquivalenz und die topologische Konjugiertheit – zeitdiskreter nichtinvertierbarer dynamischer Systeme auf kompakten Phasenräumen herzuleiten. Bei der Formulierung der Resultate wurde vor allem Wert darauf gelegt, nicht stärkere Voraussetzungen zu fordern als tatsächlich im Beweis benötigt werden. Die Arbeit ist in fünf Kapitel unterteilt, deren Inhalt im Folgenden kurz beschrieben werden soll:

- Im ersten Kapitel geben wir eine Zusammenstellung weniger, speziell ausgewählter, wohlbekannter Definitionen und Sätze aus dem Gebiet der topologischen Dynamik. Dabei führen wir insbesondere das für uns zentrale Konzept der topologischen Konjugiertheit ein.
- Das zweite Kapitel dient der Untersuchung von Räumen stetiger Funktionen und speziell von Homöomorphismengruppen, die mit der sog. *kompaktoffenen Topologie* ausgestattet sind. Dies ist dadurch motiviert, dass die zentralen Objekte der Arbeit stetige Selbstabbildungen topologischer Räume und Homöomorphismen auf diesen Räumen sind. Auch hier stellen wir im Wesentlichen nur wohlbekannte Resultate aus der Literatur zusammen.
- Das dritte Kapitel ist in vier Abschnitte unterteilt. Im ersten Abschnitt wird der Begriff der *normalen Projektion* eingeführt, der eine Verallgemeinerung des Begriffs der *normalen Überlagerung* darstellt. Wie sich zeigt, gelten viele Aussagen über normale Überlagerungen auch für normale Projektionen. Ihre eigentliche Bedeutung wird allerdings erst in den letzten beiden Kapiteln deutlich, wo sie als Hilfsmittel zum Nachweis kombinatorischer Äquivalenz und topologischer Konjugiertheit zum Einsatz kommen. Der zweite und dritte Abschnitt liefern weitere technische Hilfsmittel, die im fünften Kapitel benötigt werden, um Konjugationsresultate zu beweisen. Der vierte Abschnitt schließlich handelt von den dynamischen Eigenschaften offener expandierender Abbildungen auf kompakten metrischen

Räumen. Im Wesentlichen werden bekannte Resultate aus [Urb 02] zusammengestellt und bewiesen. Insbesondere zu erwähnen ist der spektrale Dekompositionssatz, der das globale dynamische Verhalten offener expandierender Abbildungen auf kompakten Räumen beschreibt. Aus diesem ergeben sich dann verschiedene nichttriviale Folgerungen. Insbesondere erhält man ein Klassifikationsresultat für kompakte Längenräume, die offene expandierende Abbildungen zulassen, welches besagt, dass ein solcher Raum bereits eine topologische Mannigfaltigkeit sein muss, falls seine Krümmung auf einer offenen Teilmenge nach unten beschränkt ist.

- Im vierten Kapitel wird der Begriff des *kombinatorisch äquivalenten Funktionensystems* eingeführt. Dieser ist eine Verallgemeinerung des Konzepts der „kombinatorischen Äquivalenz“, welches in der Literatur, je nach Abbildungstyp, unterschiedlich definiert wird. Allgemein lässt sich sagen, dass kombinatorische Äquivalenz eine gröbere Äquivalenzrelation als topologische Konjugiertheit darstellt, insofern die kombinatorische Äquivalenz notwendig für die topologische Konjugiertheit ist. Zudem erhält man mit einem kombinatorisch äquivalenten Funktionensystem ein Hilfsmittel zum Nachweis topologischer Konjugiertheit, den sog. *Pullback-Operator* zweier kombinatorisch äquivalenter Abbildungen, dessen Fixpunktgleichung identisch mit der Konjugationsgleichung für diese Abbildungen ist. Insbesondere werden für zwei spezielle Abbildungstypen – die stückweise monotonen Intervallabbildungen und die Überlagerungen kompakter Hausdorffräume – notwendige und hinreichende Bedingungen für kombinatorische Äquivalenz angegeben. Es stellt sich heraus, dass die Äquivalenz von Intervallabbildungen allein von den Vorrätsorbits ihrer Umkehrpunkte abhängt, und die Äquivalenz von Überlagerungen allein von ihrer Wirkung auf der Fundamentalgruppe des Raums. Bei der Konstruktion kombinatorisch äquivalenter Systeme werden die im dritten Kapitel eingeführten normalen Projektionen als Hilfsmittel eingesetzt.
- Das fünfte Kapitel zerfällt in drei Abschnitte. Im ersten Abschnitt wird ein Kriterium zum Nachweis expandierender Abbildungen hergeleitet. Dieses liefert insbesondere ein numerisches Verfahren, um festzustellen, ob eine Abbildung $f : S^1 \rightarrow S^1$ des Einheitskreises expandierend ist. Ferner wird es verwendet, um zu zeigen, dass die maximalen kompakten invarianten Mengen der logistischen Abbildungen mit Parameter $\alpha > 4$ hyperbolisch und folglich Cantormengen sind. In der Literatur finden sich zahlreiche Beweise für diese Tatsache, die aber alle längere und kompliziertere Argumente verwenden. Im zweiten Abschnitt wird anhand eines Beispiels gezeigt, wie man die in Kapitel 4 eingeführten Pullback-Operatoren verwenden kann, um die topologische Konjugiertheit von stückweise monotonen Intervallabbildungen mit attraktiven periodischen Orbits nachzuweisen. Im dritten Abschnitt schließlich werden zwei Verallgemeinerungen eines Konjugationsresultats von M. Shub für expandierende Abbildungen auf kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeiten bewiesen. Dieses Resultat besagt im Wesentlichen, dass die topologische Konjugiertheit expandierender Abbildungen äquivalent ist zur Konjugiertheit auf Fundamentalgruppenniveau.

Die erste Verallgemeinerung des Satzes setzt an die Stelle der kompakten Mannigfaltigkeit einen kompakten semilokal einfach zusammenhängenden Längenraum. Ob es sich dabei um eine echte Verallgemeinerung handelt, ist nach den Ergebnissen des dritten Kapitels allerdings fraglich. Ein Vorteil dieser Formulierung des Resultats ist auf jeden Fall, dass man nicht mehr Bedingungen voraussetzt als tatsächlich für den Beweis benötigt werden. Die zweite Verallgemeinerung dagegen setzt an die Stelle der Mannigfaltigkeit eine sog. Orbifaltigkeit (engl.: „orbifold“) und an die Stelle einer expandierenden Abbildung eine Abbildung, die nur noch „fast überall“ expandierend ist, d. h. überall bis auf einer endlichen Menge von singulären Punkten.

Im ca. 20 Seiten langen Anhang der Arbeit werden elementare Definitionen und Resultate aus den Gebieten *Topologie*, *Geometrie* und *Dynamische Systeme* aufgelistet, die in der Arbeit Verwendung finden.

Mein Dank gilt in erster Linie Prof. Dr. Bernd Aulbach, der durch seine Vorlesungen „Chaos und Fraktale“ und „Komplexe Dynamik“ mein Interesse für dynamische Systeme im Allgemeinen und speziell für das Thema der vorliegenden Arbeit geweckt hat. Ferner möchte ich Prof. Dr. Fritz Colonius meinen herzlichen Dank dafür aussprechen, dass er nach dem unerwarteten Tod von Prof. Aulbach die Betreuung meiner Arbeit übernommen hat. Insbesondere möchte ich mich auch bei Dr. Martin Rasmussen und Dr. Ludwig Neidhart bedanken für das Korrekturlesen der Arbeit und für viele wertvolle Ratschläge zur Verbesserung des Layouts. Und schließlich sollen folgende Personen nicht unerwähnt bleiben, die sich, neben den bereits genannten, oftmals Zeit genommen haben, um mir zahlreiche Fragen zu beantworten:

Christian Boltner, Jost-Hinrich Eschenburg, Walter Freyn, Ernst Heintze, Andreas Kollross, Christian Kreuzer, Mauro Patrão, Peter Quast, Markus Rothbauer, Werner Schabert, Torben Stender.

Kapitel 1

Topologische Dynamik

1.1 Grundbegriffe

An den Anfang dieses Kapitels wollen wir die abstrakte Definition eines dynamischen Systems stellen, und davon ausgehend werden wir einige zentrale Begriffe der topologischen Dynamik einführen.

1.1.1 Definition (Dynamisches System):

Es sei X eine Menge und $(\mathbb{T}, +)$ eine abelsche Halbgruppe mit neutralem Element 0 (üblicherweise $\mathbb{T} \in \{\mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{R}_0^+, \mathbb{R}\}$). Ferner sei $\Phi : \mathbb{T} \times X \rightarrow X$ eine Abbildung, die den folgenden Axiomen genügt:

- (1) $\Phi(0, x) = x$ für alle $x \in X$.
- (2) $\Phi(t + s, x) = \Phi(t, \Phi(s, x))$ für alle $x \in X$ und $t, s \in \mathbb{T}$.

Dann bezeichnet man das Tripel (X, \mathbb{T}, Φ) oder auch nur die Abbildung Φ als **dynamisches System**.¹ X heißt der **Zustands- oder Phasenraum** des dynamischen Systems und \mathbb{T} die **Zeit**. Im Fall $\mathbb{T} \in \{\mathbb{N}_0, \mathbb{Z}\}$ spricht man auch von einem **diskreten**, und im Fall $\mathbb{T} \in \{\mathbb{R}_0^+, \mathbb{R}\}$ von einem **kontinuierlichen dynamischen System**.

Mit dieser sehr allgemeinen Definition lässt sich zunächst wenig anfangen, so lange man nicht zusätzliche Bedingungen an den Zustandsraum X und die Abbildung Φ stellt. Bei einem „natürlich“ gegebenen System, das z. B. als Modell für ein physikalisches System dienen soll, ist X zumeist eine Teilmenge des Euklidischen Raums \mathbb{R}^n (in der Regel eine Untermannigfaltigkeit) und Φ eine differenzierbare Abbildung. In diesem Fall kann man zur Untersuchung des Systems alle Strukturen des \mathbb{R}^n , die von Φ respektiert werden, zur Hilfe nehmen (z. B. algebraische, topologische, messbare und differenzierbare Strukturen). In der *topologischen Dynamik* beschränkt man sich jedoch auf die topologische bzw. metrische Struktur. Konkret bedeutet dies, dass man als Zustandsraum des Systems einen (hinreichend gutartigen) topologischen Raum, zumeist sogar

¹Für $\mathbb{T} \in \{\mathbb{N}_0, \mathbb{R}_0^+\}$ spricht man manchmal auch von einem *semidynamischen System*. Wir werden diese begriffliche Unterscheidung jedoch nicht machen.

einen kompakten oder lokal kompakten metrischen Raum voraussetzt und von Φ mindestens die Stetigkeit fordert, zusätzlich jedoch allein Eigenschaften, die sich mit Hilfe der topologischen oder metrischen Struktur des Zustandsraums X beschreiben lassen. In dieser Arbeit werden wir uns im Wesentlichen auf die Betrachtung solcher Systeme beschränken. Ferner werden wir ausschließlich zeitdiskrete Systeme untersuchen, also solche mit $\mathbb{T} \in \{\mathbb{N}_0, \mathbb{Z}\}$. Der Vorteil eines derartigen Systems ist, dass man es durch eine einzige (stetige) Selbstabbildung $f : X \rightarrow X$ beschreiben kann. Dazu definiert man rekursiv für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ die **n -te Iterierte** f^n von f mittels

$$f^0 := \text{id}_X, \quad f^{n+1} := f \circ f^n,$$

und setzt $\Phi(n, x) := f^n(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $x \in X$. Dass so tatsächlich ein dynamisches System definiert wird, ergibt sich aus den für alle $n, m \in \mathbb{N}_0$ und $x \in X$ gültigen Identitäten

$$\Phi(n+m, x) = f^{n+m}(x) = f^n(f^m(x)) = \Phi(n, \Phi(m, x)).$$

Ist umgekehrt ein diskretes System $\Phi : \mathbb{N}_0 \times X \rightarrow X$ gegeben, und eine Abbildung $f : X \rightarrow X$ durch $f(x) := \Phi(1, x)$ definiert, so ergibt sich mittels vollständiger Induktion $\Phi(n, x) = f^n(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $x \in X$. Ist f sogar ein Homöomorphismus, so können wir auch die Rückwärtsiterierten $f^{-n} := (f^{-1})^n$ ($n \in \mathbb{N}$) definieren und damit ein System mit $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ beschreiben. Ferner bezeichnen wir mit $f^{-n}(A)$ das Urbild einer Menge $A \subset X$ unter der n -ten Iterierten f^n einer beliebigen Abbildung $f : X \rightarrow X$. Aufgrund dieser 1-1-Korrespondenz zwischen diskreten dynamischen Systemen und Selbstabbildungen können wir alle nun folgenden Begriffsbildungen von einer Abbildung und ihren Iterierten ableiten. Dabei sei X stets ein topologischer Raum und $f : X \rightarrow X$ stetig.

1.1.2 Definition (Orbits und Trajektorien):

Man definiert den **Vorwärtsorbit** $O_f^+(x)$ bzw. den **Rückwärtsorbit** $O_f^-(x)$ von x unter f durch

$$O_f^+(x) := \{f^n(x) \mid n \in \mathbb{N}_0\}, \quad O_f^-(x) := \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} f^{-n}(\{x\}).$$

Die Punktfolge $(f^n(x))_{n \in \mathbb{N}_0}$ heißt die **Trajektorie** von x unter f .

1.1.3 Vereinbarung:

Wenn wir im Weiteren vom „Orbit“ eines Punktes sprechen ohne den Zusatz „Vorwärts-“ oder „Rückwärts-“ zu verwenden, so ist stets der Vorwärtsorbit gemeint.

Mit den eben eingeführten Begriffen lässt sich nun sagen, dass die Analyse eines diskreten dynamischen Systems die Untersuchung des asymptotischen Verhaltens seiner Trajektorien bzw. der Lage seiner Orbits ist. Die einfachsten Orbits sind die endlichen. Diese lassen sich wie folgt klassifizieren.

1.1.4 Definition (Periodische und schließlich periodische Orbits):

Ein Punkt $x \in X$ heißt **periodisch mit Periode n** oder kurz **n -periodisch**, falls $f^n(x) = x$. Ein 1-periodischer Punkt wird auch **Fixpunkt** genannt. Die Zahl $n \in \mathbb{N}$ heißt **Primperiode** von x , falls $f^i(x) \neq x$ für $i = 1, \dots, n-1$ und $f^n(x) = x$. Der Vorrwärtsorbit $O_f^+(x) = \{x, f(x), \dots, f^{n-1}(x)\}$ eines n -periodischen Punktes x heißt **periodischer Orbit**. Ferner definieren wir die Mengen

$$\begin{aligned} \text{Per}_n(f) &:= \{x \in X \mid x \text{ ist } n\text{-periodischer Punkt von } f\}, \\ \text{Fix}(f) &:= \text{Per}_1(f), \\ \text{Per}(f) &:= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{Per}_n(f). \end{aligned}$$

Ist $x \in X \setminus \text{Per}(f)$ und existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $f^m(x) \in \text{Per}(f)$, so heißt x **schließlich periodischer Punkt** von f mit **Präperiode m** .

Neben einzelnen Punkten wollen wir auch Teilmengen des Zustandsraums bzgl. der Dynamik des Systems charakterisieren.

1.1.5 Definition (Vorrwärts- und rückwärtsinvariante Mengen):

Eine Menge $A \subset X$ heißt

- (1) **(f -)vorwärtsinvariant**, falls $f(A) \subset A$.
- (2) **(f -)rückwärtsinvariant**, falls $f^{-1}(A) \subset A$.
- (3) **total invariant (bzgl. f)**, falls A vorwärts- und rückwärtsinvariant ist.

A heißt **strikt vorwärts- (bzw. rückwärts-) invariant**, falls $f(A) = A$ bzw. $f^{-1}(A) = A$ gilt.

1.1.6 Satz und Definition (ω -Grenzmenge):

Für jedes $x \in X$ definieren wir die **ω -Grenzmenge** von x durch

$$\omega(x, f) := \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} \text{cl} \left(\bigcup_{k \geq n} \{f^k(x)\} \right). \quad (1.1)$$

1.1.7 Lemma (Eigenschaften der ω -Grenzmenge):

$\omega(x, f)$ ist eine abgeschlossene vorwärtsinvariante Menge. Ist (X, d) ein metrischer Raum, so ist $\omega(x, f)$ die Menge der Häufungswerte der Trajektorie $(f^n(x))_{n \in \mathbb{N}_0}$. Ist (X, d) kompakt, so ist $\omega(x, f)$ zudem nicht leer und kompakt.

Beweis:

Als Schnitt abgeschlossener Mengen ist $\omega(x, f)$ abgeschlossen. Ferner gilt unter Verwendung der Stetigkeit von f :

$$f(\omega(x, f)) \stackrel{(1.1)}{=} f \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} \text{cl} \left(\bigcup_{k \geq n} \{f^k(x)\} \right) \right) \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} \text{cl} \left(\bigcup_{k \geq n} \{f^{k+1}(x)\} \right).$$

Da die Mengenfolge $M_n := \bigcup_{k \geq n} \{f^k(x)\}$ fallend im Sinne der Mengeninklusion ist, gilt weiter:

$$f(\omega(x, f)) \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} \text{cl} \left(\bigcup_{k \geq n} \{f^{k+1}(x)\} \right) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} \text{cl} \left(\bigcup_{k \geq n} \{f^k(x)\} \right) = \omega(x, f).$$

Damit ist die Vorwärtsinvarianz von $\omega(x, f)$ gezeigt. Ist (X, d) ein metrischer Raum, so gelten folgende Äquivalenzen:

$$\begin{aligned} z \in \omega(x, f) &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 : z \in \text{cl}\left(\bigcup_{k \geq n} \{f^k(x)\}\right). \\ &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 : \forall \varepsilon > 0 : \exists k_n \geq n : d(f^{k_n}(x), z) < \varepsilon. \\ &\Leftrightarrow z \text{ ist ein Häufungswert von } (f^n(x))_{n \in \mathbb{N}_0}. \end{aligned}$$

Also ist $\omega(x, f)$ die Menge der Häufungswerte von $(f^n(x))_{n \in \mathbb{N}_0}$. Ist (X, d) kompakt, so existiert nach Satz A.1.34 (b) mindestens ein Häufungswert, also gilt $\omega(x, f) \neq \emptyset$. Als abgeschlossene Teilmenge eines kompakten metrischen Raums ist $\omega(x, f)$ nach Satz A.1.22 (c) dann auch kompakt. \square

1.1.8 Definition (Topologische Mischungseigenschaften):

Die Abbildung f heißt

- (1) **topologisch transitiv**, falls für jedes Paar (U, V) nichtleerer offener Teilmengen von X ein $n \in \mathbb{N}_0$ mit $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ existiert.
- (2) **topologisch mischend**, falls für jedes Paar (U, V) nichtleerer offener Teilmengen von X ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ für alle $n \geq N$ gilt.
- (3) **topologisch exakt**, falls für jede nichtleere offene Teilmenge U von X ein $n \in \mathbb{N}$ mit $f^n(U) = X$ existiert.

1.1.9 Bemerkung:

Es gelten offensichtlich folgende Implikationen:

„topologisch exakt“ \Rightarrow „topologisch mischend“ \Rightarrow „topologisch transitiv“.

Ferner ist jede topologisch transitive Abbildung auf einem kompakten metrischen Raum surjektiv. Andernfalls wäre nämlich $V = X \setminus f(X)$ offen und nichtleer. Dies ist ein Widerspruch, da $f^n(X) \cap V = \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

1.1.10 Satz (Charakterisierung topologischer Transitivität):

Es sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (a) f ist topologisch transitiv.
- (b) Für jedes Paar (U, V) nichtleerer offener Teilmengen von X und jedes $N \in \mathbb{N}_0$ existiert ein $n \geq N$, so dass $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.
- (c) Es existiert ein Punkt $x \in X$ mit $\omega(x, f) = X$.

Beweis:

(a) \Rightarrow (c): Sei f topologisch transitiv. Dann ist offensichtlich für jede nichtleere offene Menge $V \subset X$ die folgende Menge offen und dicht in X :

$$K(V) := \{x \in X \mid \exists n \in \mathbb{N}_0 : f^n(x) \in V\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} f^{-n}(V).$$

Nach Satz A.1.38 existiert eine abzählbare Basis $\{V_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ der Topologie von X und der Durchschnitt

$$K := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \bigcap_{N \in \mathbb{N}_0} K(f^{-N}(V_k))$$

liegt dicht in X . Insbesondere ist K nichtleer und für jedes $x \in K$ gilt:

$$\forall k \in \mathbb{N} : \forall N \in \mathbb{N}_0 : \exists n \in \mathbb{N}_0 : f^{n+N}(x) \in V_k.$$

Also trifft die Trajektorie von x jede der Basismengen V_k unendlich oft. Folglich gilt $\omega(x, f) = X$.

(c) \Rightarrow (b): Sei $x \in X$ mit $\omega(x, f) = X$ gegeben. $U, V \subset X$ seien nichtleere offene Mengen und $N \in \mathbb{N}_0$ beliebig. Dann existieren $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \geq m$ und $n - m \geq N$, so dass $f^m(x) \in U$ und $f^n(x) \in V$. Daher gilt $f^{n-m}(U) \cap V \neq \emptyset$, denn $f^m(x) \in U$ und $f^{n-m}(f^m(x)) = f^n(x) \in V$.

Die Implikation „(b) \Rightarrow (a)“ ist trivial. Damit ist der Beweis vollständig. \square

1.1.11 Bemerkung:

Aus $\omega(x, f) = X$ folgt, dass der Vorwärtsorbit von x dicht in X liegt. Die Umkehrung gilt nur, falls X keine isolierten Punkte besitzt. Ist z. B. $X = \{0, 1\}$ mit der diskreten Metrik, und $f : X \rightarrow X$ gegeben durch $f(0) = f(1) = 0$, so folgt $O_f^+(1) = \text{cl}(O_f^+(1)) = X$, aber $\omega(x, f) = \{0\}$.

1.1.12 Definition (Nichtwandernde Menge):

Ein Punkt $x \in X$ heißt **wandernd**, falls eine offene Umgebung V von x existiert, so dass $V \cap f^n(V) = \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Andernfalls heißt x **nichtwandernd**. Die Menge der nichtwandernden Punkte von f , die wir auch die **nichtwandernde Menge** von f nennen, werde mit $\Omega(f)$ bezeichnet.

1.1.13 Lemma (Eigenschaften der nichtwandernden Menge):

Es sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum. Dann gilt:

- (a) $\Omega(f)$ enthält alle ω -Grenzmengen von f .
- (b) $\Omega(f)$ ist nichtleer, kompakt und vorwärtsinvariant.
- (c) Ist f topologisch transitiv, so gilt $\Omega(f) = X$.
- (d) Ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X mit $f(x_{n+1}) = x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so liegt jeder Häufungswert von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\Omega(f)$.

Beweis:

- (a) Sei $x \in X$ beliebig und $y \in \omega(x, f)$. Dann gilt $y = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{m_n}(x)$ für eine streng monoton wachsende Folge $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen. Für jede offene Umgebung U von y gilt dann $f^{m_n}(x) \in U$ für alle hinreichend großen $n \in \mathbb{N}$, und damit $U \cap f^{m_{n+1}-m_n}(U) \neq \emptyset$. Es folgt $\omega(x, f) \subset \Omega(f)$.
- (b) Da jede ω -Grenzmenge nach Lemma 1.1.7 nichtleer ist, gilt nach (a) $\Omega(f) \neq \emptyset$. Offensichtlich ist die Menge der wandernden Punkte offen in X und damit $\Omega(f)$ abgeschlossen, also kompakt. Sei $x \in \Omega(f)$ und V

eine offene Umgebung von $f(x)$. Dann ist $f^{-1}(V)$ eine offene Umgebung von x und folglich existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $f^n(f^{-1}(V)) \cap f^{-1}(V) \neq \emptyset$. Daraus folgt $f^n(V) \cap V \neq \emptyset$. Also ist $\Omega(f)$ vorwärtsinvariant.

- (c) Ist f topologisch transitiv, so existiert zu jeder nichtleeren offenen Menge $U \subset X$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$, also gilt $\Omega(f) = X$.
- (d) Sei $z \in X$ ein Häufungswert der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Dann existiert eine streng monoton wachsende Folge $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen, so dass $z = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{m_n}$ gilt. Sei U eine offene Umgebung von z . Dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_{m_n} \in U$ für alle $n \geq n_0$. Es folgt $x_{m_n} = f^{m_{n+1}-m_n}(x_{m_{n+1}})$ (für alle $n \geq n_0$), also $x_{m_n} \in U \cap f^{m_{n+1}-m_n}(U)$. Daher gilt $z \in \Omega(f)$. \square

1.2 Topologische Konjugation

In der Topologie gelten zwei Räume X und Y als äquivalent, wenn es einen Homöomorphismus $h : X \rightarrow Y$ gibt. Auf diesem Äquivalenzbegriff beruht auch der Begriff der topologischen Konjugation, mit dem sich die Äquivalenz zweier Systeme in der topologischen Dynamik beschreiben lässt:

1.2.1 Definition (Topologische Konjugation):

Es seien X, Y topologische Räume und $f : X \rightarrow X$, $g : Y \rightarrow Y$ stetige Abbildungen. Existiert dann ein Homöomorphismus $h : X \rightarrow Y$ mit der Eigenschaft

$$h \circ f = g \circ h, \quad (1.2)$$

so nennen wir f und g **topologisch konjugiert**. Wird die obige Identität nur von einer stetigen Surjektion h erfüllt, so sagen wir, f ist zu g **semikonjugiert**. Die Abbildung h nennen wir eine **(Semi)Konjugation von f nach g** . Die Gleichung (1.2) lässt sich auch durch das folgende kommutative Diagramm veranschaulichen:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ Y & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

1.2.2 Bemerkung:

Wie man leicht mittels vollständiger Induktion zeigt, folgt aus der topologischen (Semi)Konjugiertheit zweier Abbildungen f und g durch eine (Semi)Konjugation h , dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ auch die n -ten Iterierten f^n und g^n durch h (semi)konjugiert sind. Damit ist klar, dass h Orbits von f auf Orbits von g abbildet. Im Falle einer topologischen Konjugation schreibt man die Identität (1.2) oft auch in der Form

$$f = h^{-1} \circ g \circ h \quad \text{oder} \quad g = h \circ f \circ h^{-1}.$$

1.2.3 Beispiel:

Wir wollen die auf dem Einheitsintervall $[0, 1]$ definierten Abbildungen

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{für } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2 - 2x & \text{für } x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \quad \text{und} \quad g(x) = 4x(1 - x)$$

als topologisch konjugiert nachzuweisen. Um dies zu tun, geben wir eine Konjugation h (von f nach g) explizit an:

$$h(x) = \sin^2(\frac{\pi}{2}x), \quad h : [0, 1] \rightarrow [0, 1].$$

Dass es sich bei der so definierten Abbildung h um einen Homöomorphismus handelt, zeigt man am einfachsten, indem man nachrechnet, dass die durch $x \mapsto \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x}$ definierte stetige Funktion invers zu h ist. Die Gültigkeit der Konjugationsidentität (1.2) ergibt sich aus der folgenden Rechnung.

$$h(f(x)) = \begin{cases} \sin^2(\pi x) & \text{für } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ \sin^2(\pi - \pi x) & \text{für } x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}.$$

Aufgrund der Eigenschaft $\sin(\pi - x) \equiv \sin(x)$ der Sinusfunktion folgt:

$$\begin{aligned} h(f(x)) &= \sin^2(\pi x) = [2 \sin(\frac{\pi}{2}x) \cos(\frac{\pi}{2}x)]^2 = 4 \sin^2(\frac{\pi}{2}x) \cos^2(\frac{\pi}{2}x) \\ &= 4 \sin^2(\frac{\pi}{2}x)(1 - \sin^2(\frac{\pi}{2}x)) = 4h(x)(1 - h(x)) = g(h(x)). \end{aligned}$$

Damit sind f und g als topologisch konjugiert nachgewiesen. Die folgende Grafik stellt die Graphen von f , g und h dar.² \diamond

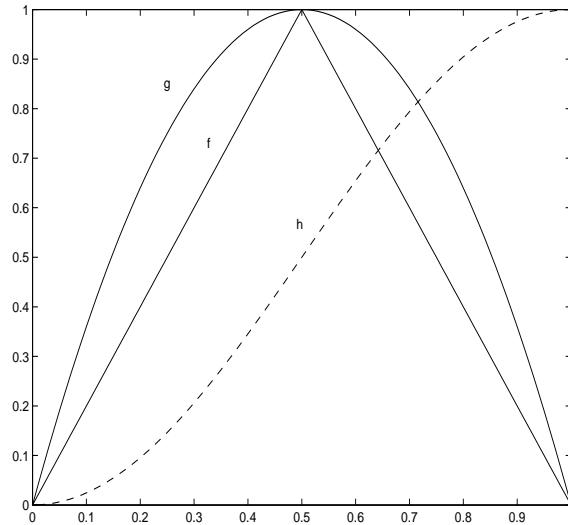


Abbildung 1.1: Graphen der Funktionen f , g und h .

²Die Abbildung f wird auch als *Zeltabbildung* und die Abbildung g als *logistische Abbildung* bezeichnet. Beide Abbildungen sind Beispiele für sog. chaotische Systeme.

Man kann sogar zeigen, dass es sich bei der angegebenen Abbildung h im obigen Beispiel um die einzige Konjugation der Abbildungen f und g handelt. Dass i. A. Konjugationen jedoch nicht eindeutig bestimmt sind, sieht man am deutlichsten am Beispiel der Identität $\text{id}_X : X \rightarrow X$ eines beliebigen Raumes X . Diese ist nämlich durch jeden Homöomorphismus $h : X \rightarrow X$ zu sich selbst konjugiert. Das folgende Beispiel zeigt, dass semikonjugierte Abbildungen nicht konjugiert sein müssen.

1.2.4 Beispiel:

Wir betrachten die Abbildungen

$$\begin{aligned} f(z) &= z^2, \quad f : S^1 \rightarrow S^1, \\ g(x) &= 2x^2 - 1, \quad g : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]. \end{aligned}$$

Dass f und g nicht topologisch konjugiert sind, folgt bereits daraus, dass die Räume S^1 und $[0, 1]$ nicht homöomorph sind. $[0, 1]$ ist nämlich einfach zusammenhängend, S^1 aber nicht. Da einfacher Zusammenhang unter Homöomorphie erhalten bleibt, kann also kein konjugierender Homöomorphismus existieren. Es ist jedoch f zu g semikonjugiert mittels

$$h(z) = \text{Re}(z), \quad h : S^1 \rightarrow [-1, 1].$$

Als Projektion auf die erste Koordinate ist h offensichtlich stetig. Da $-1, 1 \in S^1$, ist h nach dem Zwischenwertsatz auch surjektiv, und schließlich gilt für alle $x + iy \in S^1$ (d. h. $x^2 + y^2 = 1$):

$$\begin{aligned} h(f(x + iy)) &= \text{Re}((x + iy)^2) = x^2 - y^2 = x^2 - (1 - x^2) \\ &= 2x^2 - 1 = 2 \text{Re}(x + iy)^2 - 1 = g(h(x + iy)). \end{aligned}$$

◇

1.2.5 Bemerkungen:

- Dass es sich bei dem Begriff der topologischen Konjugation um ein sinnvolles mathematisches Äquivalenzkonzept, d. h. um eine Äquivalenzrelation, handelt, ist klar: Jede stetige Abbildung $f : X \rightarrow X$ ist mittels der Identität zu sich selbst topologisch konjugiert (Reflexivität). Aus $h \circ f = g \circ h$ folgt $h^{-1} \circ g = f \circ h^{-1}$ (Symmetrie). Gelten für zwei Homöomorphismen h_1, h_2 und drei stetige Selbstabbildungen f_1, f_2, f_3 die Konjugationsidentitäten $h_1 \circ f_1 = f_2 \circ h_1$ und $h_2 \circ f_2 = f_3 \circ h_2$, so folgt $(h_2 \circ h_1) \circ f_1 = f_3 \circ (h_2 \circ h_1)$ (Transitivität).
- Da Konjugationen Orbits homöomorph auf Orbits abbilden, ergeben sich sofort eine Reihe von Invarianten, die unter Konjugation erhalten bleiben, wie etwa die Anzahl der periodischen Punkte einer festen Periode, oder die Anzahl der schließlich periodischen Punkte mit fester Präperiode. Überhaupt stimmen topologisch konjugierte Abbildungen in allen dynamischen Eigenschaften, die sich topologisch beschreiben lassen, überein. Dazu gehören etwa die in Definition 1.1.8 eingeführten topologischen Mischungseigenschaften, oder die topologischen Eigenschaften der Mengen $\text{Per}(f)$ und

$\Omega(f)$. Aus diesem Grund wird die topologische Konjugation oft als Hilfsmittel eingesetzt, um dynamische Eigenschaften eines Systems nachzuweisen, die für ein konjugiertes System bereits bekannt sind. So lässt sich z. B. die topologische Transitivität der Zeltabbildung (die wir an dieser Stelle nicht nachweisen wollen) aus Beispiel 1.2.3 leichter auf direktem Wege zeigen als die der logistischen Abbildung.

- Im Falle einer Semikonjugation h von f nach g übertragen sich dynamische Eigenschaften von f auf g aber i. A. nicht umgekehrt. Ist z. B. x ein Fixpunkt von f , so gilt $g(h(x)) = h(f(x)) = h(x)$, also ist $h(x)$ ein Fixpunkt von g . Ist umgekehrt $y = h(x)$ ein Fixpunkt von g , so folgt $f(x) \in h^{-1}(h(x))$, aber nicht notwendigerweise $f(x) = x$. In Beispiel 1.2.4 etwa gilt für die semikonjugierten Abbildungen f und g :

$$\# \text{Fix}(f) = \#\{1\} = 1 \neq 2 = \#\{-\frac{1}{2}, 1\} = \# \text{Fix}(g).$$

Kapitel 2

Funktionenräume und Homöomorphismengruppen

In diesem Kapitel geht es darum, eine Topologie für Räume stetiger Funktionen und speziell für Gruppen von Homöomorphismen einzuführen. Dies dient dem Zweck, Stetigkeit von Operatoren bzw. Konvergenz von Funktionenfolgen beschreiben zu können.

2.1 Topologische und metrische Funktionenräume

Für die Menge aller Abbildungen von einer Menge X in eine Menge Y führen wir die Notation Y^X ein. Sind X und Y topologische Räume, so bezeichnen wir die Menge der stetigen Abbildungen von X nach Y mit $\mathcal{C}(X, Y)$. Die Teilmenge der Homöomorphismen $h : X \rightarrow Y$ soll mit $\mathcal{H}(X, Y)$ bezeichnet werden. Statt $\mathcal{C}(X, X)$ bzw. $\mathcal{H}(X, X)$ schreiben wir auch kurz $\mathcal{C}(X)$ bzw. $\mathcal{H}(X)$.

Für beliebige Teilmengen $A \subset X$ und $B \subset Y$ von topologischen Räumen X, Y definieren wir

$$[A, B] := \{f \in Y^X \mid f(A) \subset B\}.$$

Unter Verwendung dieser Notation führen wir nun eine Topologie auf Y^X ein.

2.1.1 Definition (Kompakt-offene Topologie):

Es seien (X, \mathcal{T}_X) und (Y, \mathcal{T}_Y) topologische Räume. Dann bezeichnen wir mit $\mathcal{T}_{CO} = \mathcal{T}_{CO}(Y^X)$ die von der Subbasis

$$\mathcal{S}_{CO} := \{[K, U] \mid K \subset X \text{ kompakt und } U \in \mathcal{T}_Y\}$$

erzeugte Topologie. Diese trägt den Namen **kompakt-offene Topologie**. Dabei ist die Konvention $[\emptyset, U] = Y^X$, $[K, \emptyset] = \emptyset$ für alle offenen Mengen $U \subset X$ und nichtleeren kompakten Mengen $K \subset Y$ zu beachten.

2.1.2 Satz (Eigenschaften der kompakt-offenen Topologie):

Es seien (X, \mathcal{T}_X) und (Y, \mathcal{T}_Y) topologische Räume. Dann gilt:

- (a) (Y^X, \mathcal{T}_{CO}) ist hausdorffsch genau dann, wenn Y hausdorffsch ist (vgl. [Dgy 66, Theorem 1.3, S. 258]).
- (b) Ist X lokal kompakt, so erfüllt $(\mathcal{C}(X, Y), \mathcal{T}_{CO})$ das zweite Abzählbarkeitsaxiom, wenn X und Y das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllen (vgl. [Dgy 66, Theorem 5.2, S. 265]).
- (c) X sei hausdorffsch und \mathcal{S}_Y sei eine Subbasis der Topologie \mathcal{T}_Y . Dann bilden die Mengen der Form $[K, U]$ mit $K \subset X$ kompakt und $U \in \mathcal{S}_Y$ eine Subbasis von $(\mathcal{C}(X, Y), \mathcal{T}_{CO})$ (vgl. [Dck 91, Satz 11.1, S. 158]).

Für jedes Paar (X, Y) von topologischen Räumen definieren wir die *Auswertungsabbildung*

$$e_{X,Y} : X \times \mathcal{C}(X, Y) \rightarrow Y, \quad e_{X,Y}(x, f) := f(x).$$

Zu jeder stetigen Abbildung $f : X \times Y \rightarrow Z$ definieren wir die zu f *adjungierte Abbildung*

$$\hat{f} : Y \rightarrow \mathcal{C}(X, Z), \quad \hat{f}(y) : X \rightarrow Z, \quad x \mapsto f(x, y).$$

2.1.3 Satz (Stetige Operatoren):

Es seien X, Y, Z Hausdorffräume. Stattet man alle Abbildungsräume mit der kompakt-offenen Topologie aus, so gilt:

- (a) Ist X lokal kompakt, so ist $e_{X,Y} : X \times \mathcal{C}(X, Y) \rightarrow Y$ stetig (vgl. [Mnk 75, Theorem 5.3, S. 287]).
- (b) Ist $f : X \times Y \rightarrow Z$ stetig, dann auch $\hat{f} : Y \rightarrow \mathcal{C}(X, Z)$ (vgl. [Hat 02, Prop. A.14, S. 530]).
- (c) Sind $g : Z \rightarrow X$ und $h : Y \rightarrow Z$ stetig, so auch die Operatoren

$$\mathcal{C}(X, Y) \rightarrow \mathcal{C}(Z, Y), f \mapsto f \circ g \quad \text{und} \quad \mathcal{C}(X, Y) \rightarrow \mathcal{C}(X, Z), f \mapsto h \circ f$$

(vgl. [Dgy 66, Theorem 2.1, S. 259]).

- (d) Ist Y lokal kompakt, so ist die Komposition

$$\mathcal{C}(X, Y) \times \mathcal{C}(Y, Z) \rightarrow \mathcal{C}(X, Z), \quad (f, g) \mapsto g \circ f,$$

stetig (vgl. [Dgy 66, Theorem 2.2, S. 259]).

- (e) Ist X lokal kompakt, so ist die Abbildung

$$\mathcal{C}(X \times Y, Z) \rightarrow \mathcal{C}(Y, \mathcal{C}(X, Z)), \quad f \mapsto \hat{f},$$

bijektiv (vgl. [Hat 02, Prop. A.16, S. 531]).

Der folgende Satz charakterisiert die Zusammenhangskomponenten von Funktionenräumen.

2.1.4 Satz (Zusammenhangskomponenten):

- (a) Sind X, Y Hausdorffräume und X lokal kompakt, so sind die Homotopieklassen einer beliebigen Teilmenge $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(X, Y)$ genau die Wegzusammenhangskomponenten von $(\mathcal{F}, \mathcal{T}_{CO})$.
- (b) Sind X und Y triangulierbare Räume, so sind die Homotopieklassen von $\mathcal{C}(X, Y)$ offen und abgeschlossen in $(\mathcal{C}(X, Y), \mathcal{T}_{CO})$ und damit identisch mit den Zusammenhangskomponenten.

Beweis:

- (a) Es reicht zu zeigen, dass zwei Abbildungen $f, g \in \mathcal{F}$ genau dann homotop sind, wenn man sie durch einen Weg miteinander verbinden kann. Nach Satz 2.1.3 (e) entsprechen sich die Homotopien $H : X \times I \rightarrow Y$ und die Wege $c : I \rightarrow \mathcal{C}(X, Y)$ umkehrbar eindeutig durch die Abbildung $H \mapsto \hat{H}$. Verläuft eine Homotopie H in \mathcal{F} , so auch der zugehörige Weg \hat{H} und umgekehrt. Damit ist die Aussage bewiesen.
- (b) Nach Voraussetzung existieren Simplizialkomplexe K_X und K_Y und Homöomorphismen $h_X : |K_X| \rightarrow X$, $h_Y : |K_Y| \rightarrow Y$. Zwei stetige Abbildungen $f, g : X \rightarrow Y$ sind offensichtlich genau dann homotop, wenn $h_Y^{-1} \circ f \circ h_X : |K_X| \rightarrow |K_Y|$ und $h_Y^{-1} \circ g \circ h_X : |K_X| \rightarrow |K_Y|$ homotop sind. Also können wir $X = |K_X|$, $Y = |K_Y|$ annehmen:
Es sei $f : |K_X| \rightarrow |K_Y|$ stetig. Aus Satz A.3.16 folgt, dass durch $\mathcal{U} := \{f^{-1}(\text{St}_{K_Y}(y)) \mid y \in K_Y \text{ Ecke}\}$ eine offene Überdeckung von $|K_X|$ gegeben ist. Nach Satz A.3.11 ist es möglich, ein $q \in \mathbb{N}$ zu finden, so dass zu jeder Ecke $x \in K_X^{(q)}$ der abgeschlossene Eckenstern $\text{cl}(\text{St}_{K_X}(x))$ ganz in einer der Mengen $U_x \in \mathcal{U}$, $U_x = f^{-1}(\text{St}_{K_Y}(y_x))$, liegt.¹ Da jeder Simplizialkomplex nur endlich viele Ecken besitzt, ist

$$W(f) := \bigcap_{x \in K_X^{(q)}, \dim(x)=0} [\text{cl}(\text{St}_{K_X}(x)), \text{St}_{K_Y}(y_x)]$$

als Schnitt endlich vieler Subbasiselemente eine offene Umgebung von f in der kompakt-offenen Topologie. Jedes $g \in W(f)$ besitzt nach Konstruktion eine simpliziale Approximation $\varphi : K_X^{(q)} \rightarrow K_Y$, die zugleich auch eine simpliziale Approximation von f ist.² (Diese ist eindeutig bestimmt durch die Zuordnung $x \mapsto y_x$.) Also gilt nach Satz A.3.13 $g \simeq |\varphi| \simeq f$. Folglich ist jede Homotopiekasse offen und auch abgeschlossen als Komplement der anderen Homotopieklassen. Da die Homotopieklassen nach (a) zudem wegzusammenhängend sind, folgt die Behauptung. \square

2.1.5 Bemerkung:

Insbesondere sind nach [StZ 88, Bsp. 3.1.9, S. 73] alle kompakten differenzierbaren Mannigfaltigkeiten triangulierbar.

¹Für ein genaueres Argument sei auf [StZ 88, Hilfssatz 3.2.9, S. 82] verwiesen.

²Hier verweisen wir für ein genaueres Argument auf [StZ 88, Satz 3.2.7, S. 82].

Nun soll die Frage nach der Metrisierbarkeit von $(\mathcal{C}(X, Y), \mathcal{T}_{CO})$ beantwortet werden.

2.1.6 Satz und Definition (Supremumsmetrik):

Ist X ein kompakter Raum und (Y, d) ein metrischer Raum, so wird durch

$$\Delta(f, g) := \sup_{x \in X} d(f(x), g(x)), \quad \Delta : \mathcal{C}(X, Y) \times \mathcal{C}(X, Y) \rightarrow \mathbb{R}_0^+,$$

eine Metrik auf $\mathcal{C}(X, Y)$ erklärt. Ist (Y, d) vollständig, so auch $(\mathcal{C}(X, Y), \Delta)$. Wir nennen Δ die (von d induzierte) **Supremumsmetrik**. Die von Δ induzierte Topologie \mathcal{T}_Δ stimmt mit $\mathcal{T}_{CO}(\mathcal{C}(X, Y))$ überein.

Beweis:

Die Abbildung $x \mapsto d(f(x), g(x))$, $X \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, ist als Hintereinanderschaltung der stetigen Abbildungen $x \mapsto (f(x), g(x))$, $X \rightarrow Y \times Y$, und $d : Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ stetig. Also nimmt sie auf dem kompakten Raum X nach Satz A.1.24 sogar ein Maximum an. Folglich ist Δ wohldefiniert. Δ ist positiv-definit, denn es gilt:

$$\begin{aligned} f = g &\Leftrightarrow \forall x \in X : f(x) = g(x) \Leftrightarrow \forall x \in X : d(f(x), g(x)) = 0 \\ &\Leftrightarrow \Delta(f, g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x)) = 0. \end{aligned}$$

Die Symmetrie von Δ folgt unmittelbar aus der von d . Ferner gilt für beliebige $f, g, h \in \mathcal{C}(X, Y)$ die Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned} \Delta(f, g) &= \sup_{x \in X} d(f(x), g(x)) \leq \sup_{x \in X} [d(f(x), h(x)) + d(h(x), g(x))] \\ &\leq \sup_{x \in X} d(f(x), h(x)) + \sup_{x \in X} d(h(x), g(x)) = \Delta(f, h) + \Delta(h, g). \end{aligned}$$

Also ist Δ eine Metrik. Nun sei (Y, d) vollständig. Ist $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{C}(X, Y)$ eine Cauchy-Folge, so gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq N : \forall x \in X : d(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon.$$

Also konvergiert $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen die aufgrund der Vollständigkeit von (Y, d) punktweise wohldefinierte Grenzfunktion $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$. Aus der gleichmäßigen Konvergenz folgt $f \in \mathcal{C}(X, Y)$. Damit ist die Vollständigkeit von $(\mathcal{C}(X, Y), \Delta)$ bewiesen.

Nun zeigen wir, dass \mathcal{T}_{CO} und \mathcal{T}_Δ übereinstimmen:

$\mathcal{T}_{CO} \subset \mathcal{T}_\Delta$: Es reicht zu zeigen, dass die Subbasiselemente $[K, U]$ offen bzgl. der Metrik Δ sind. Es sei also $f \in [K, U]$ gegeben, d. h. $f(K) \subset U$. Falls $U = Y$ ist $[K, U] = \mathcal{C}(X, Y)$ trivialerweise offen. Also können wir $Y \setminus U \neq \emptyset$ annehmen. Wir definieren

$$\varepsilon := \inf \{d(f(x), y) \mid (x, y) \in K \times (Y \setminus U)\}.$$

Es ist also ε der Abstand von $f(K)$ zum Komplement von U in Y . Dieser ist positiv, denn andernfalls würde es eine Punktfolge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $f(K)$ geben, die gegen einen Randpunkt von U konvergiert. Da $f(K)$ kompakt ist, liegt

dieser Randpunkt in $f(K)$. Da U offen ist, liegt er jedoch nicht in U . Das ist ein Widerspruch zu $f(K) \subset U$. Es sei $\Delta(g, f) < \varepsilon$. Dann gilt insbesondere $d(g(x), f(x)) < \varepsilon$ für alle $x \in K$. Mit der Dreiecksungleichung nach unten gilt dann für jedes $y \in Y \setminus U$ und $x \in K$:

$$d(y, g(x)) \geq d(y, f(x)) - d(f(x), g(x)) > \varepsilon - \varepsilon = 0.$$

Daraus folgt $g(K) \subset U$, also $g \in [K, U]$.

$\mathcal{T}_\Delta \subset \mathcal{T}_{CO}$: Es sei $A \subset \mathcal{C}(X, Y)$ offen bzgl. Δ und $f \in A$ beliebig. Es reicht zu zeigen, dass die Menge A eine Umgebung von f in $(\mathcal{C}(X, Y), \mathcal{T}_{CO})$ ist. Dazu werden wir nachweisen, dass es ein endliches System $\{K_i\}_{i \in I}$ von kompakten Mengen $K_i \subset X$ gibt, und ein System $\{U_i\}_{i \in I}$ von offenen Mengen $U_i \subset Y$, so dass der Schnitt $\bigcap_{i \in I} [K_i, U_i]$ f enthält und ganz in A liegt. Zunächst wählen wir $\varepsilon > 0$ so, dass $B(f, \varepsilon) \subset A$. Zu jedem Punkt $x \in X$ betrachten wir das Urbild von $B(f(x), \frac{\varepsilon}{5})$ unter f . Dieses Urbild ist eine Umgebung von x und enthält deshalb auch eine kompakte Umgebung K_x von x . Die kompakte Überdeckung $\{K_x\}_{x \in X}$ von X enthält eine endliche Teilüberdeckung $\{K_i\}_{i \in I}$. Für jedes $i \in I$ definieren wir U_i als die offene $\frac{\varepsilon}{5}$ -Umgebung von $f(K_i)$. Dadurch ergibt sich, dass der Durchmesser $\text{diam } U_i$ höchstens gleich $2\frac{\varepsilon}{5} + 2\frac{\varepsilon}{5}$ ist. Sei $g \in \bigcap_{i \in I} [K_i, U_i]$. Zu jedem $x \in X$ gibt es dann ein $i \in I$ mit $x \in K_i$. Da $g \in [K_i, U_i]$, ist $g(x) \in U_i$. Andererseits ist auch $f(x) \in U_i$. Also gilt $\Delta(f, g) = \max_{x \in X} d(f(x), g(x)) \leq \frac{4}{5}\varepsilon < \varepsilon$. Folglich gilt $g \in B(f, \varepsilon)$ und somit $\bigcap_{i \in I} [K_i, U_i] \subset B(f, \varepsilon) \subset A$. \square

2.1.7 Bemerkungen:

- Wie wir im Beweis von Satz 2.1.6 gesehen haben, konvergiert eine Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{C}(X, Y)$ genau dann gleichmäßig gegen eine Funktion $f : X \rightarrow Y$, wenn sie in $(\mathcal{C}(X, Y), \Delta)$ gegen f konvergiert. Deshalb wird \mathcal{T}_Δ bzw. $\mathcal{T}_{CO}(\mathcal{C}(X, Y))$ auch als *Topologie der gleichmäßigen Konvergenz (auf Kompakta)* bezeichnet.
- Für beliebige $f, g \in \mathcal{C}(X, Y)$ und surjektives $h \in \mathcal{C}(X)$ gilt wegen $h(X) = X$:

$$\Delta(f \circ h, g \circ h) = \sup_{y \in h(X)} d(f(y), g(y)) = \Delta(f, g). \quad (2.1)$$

Diese Eigenschaft der Supremumsmetrik werden wir noch häufig verwenden.

2.2 Homöomorphismengruppen

In diesem Abschnitt wollen wir klären, wann die Homöomorphismengruppe eines Hausdorffraums – ausgestattet mit der kompakt-offenen Topologie – zu einer topologischen oder sogar metrisierbaren Gruppe wird.

2.2.1 Satz (Homöomorphismengruppen kompakter Räume):

Es sei X ein kompakter Hausdorffraum. Dann ist $(\mathcal{H}(X), \mathcal{T}_{CO})$ eine hausdorffsche topologische Gruppe. Ist X metrisierbar mit einer Metrik d , so ist $\mathcal{H}(X)$ vollständig metrisierbar durch die Metrik

$$\Delta^\pm(h, k) = \Delta(h, k) + \Delta(h^{-1}, k^{-1}), \quad \Delta^\pm : \mathcal{H}(X) \times \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathbb{R}_0^+.$$

Beweis:

$(\mathcal{H}(X), \mathcal{T}_{CO})$ ist als Teilraum von (X^X, \mathcal{T}_{CO}) hausdorffsch nach Satz 2.1.2 (a). Die Stetigkeit der Komposition ergibt sich aus Satz 2.1.3 (d). Um die Stetigkeit der Inversion $I : h \mapsto h^{-1}$ nachzuweisen, reicht es zu zeigen, dass sie die Subbasis \mathcal{S}_{CO} in sich abbildet. Es sei also $K \subset X$ kompakt und $U \subset X$ offen. Für $h \in [K, U]$ gilt $h(K) \subset U$ oder äquivalent dazu $X \setminus U \subset X \setminus h(K)$. Da h ein Homöomorphismus ist, gilt $X \setminus h(K) = h(X \setminus K)$. Also folgt $X \setminus U \subset h(X \setminus K)$. Dies ist äquivalent zu $h^{-1}(X \setminus U) \subset X \setminus K$, oder $h^{-1} \in [X \setminus U, X \setminus K]$. Um den Beweis abzuschließen, müssen wir nur noch zeigen, dass $X \setminus U$ kompakt und $X \setminus K$ offen ist. Beides folgt aus Satz A.1.22 (c), der besagt, dass Abgeschlossenheit und Kompaktheit in kompakten Hausdorffräumen äquivalent sind. Nun sei d eine Metrik auf X . Dass durch Δ^\pm eine Metrik auf $\mathcal{H}(X)$ definiert wird, ist offensichtlich, wenn wir uns erinnern, dass Δ eine Metrik auf $\mathcal{C}(X)$ ist. Wir wollen zeigen, dass die von Δ^\pm induzierte Topologie die kompakt-offene ist. Nach Satz 2.1.6 reicht es zu zeigen, dass die Abbildung

$$(\mathcal{H}(X), \Delta) \rightarrow (\mathcal{H}(X), \Delta^\pm), \quad x \mapsto x,$$

ein Homöomorphismus ist. Seien dazu $h_0 \in \mathcal{H}(X)$ und $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Aufgrund der Stetigkeit der Inversion existiert ein $\tilde{\delta} > 0$ so dass gilt:

$$\Delta(h, h_0) < \tilde{\delta} \Rightarrow \Delta(h^{-1}, h_0^{-1}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mit $\delta := \min\{\tilde{\delta}, \frac{\varepsilon}{2}\}$ folgt:

$$\Delta(h, h_0) < \delta \Rightarrow \Delta^\pm(h, h_0) = \Delta(h, h_0) + \Delta(h^{-1}, h_0^{-1}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Die Stetigkeit der Umkehrabbildung ist wegen $\Delta^\pm(h, h_0) \geq \Delta(h, h_0)$ offensichtlich. Um die Vollständigkeit von $(\mathcal{H}(X), \Delta^\pm)$ nachzuweisen, sei eine Cauchy-Folge $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vorgegeben. Dann konvergiert sowohl $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ als auch $(h_n^{-1})_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen eine stetige Grenzfunktion h bzw. k , denn es gilt:

$$\Delta(h_n, h_m) \leq \Delta^\pm(h_n, h_m), \quad \Delta(h_n^{-1}, h_m^{-1}) \leq \Delta^\pm(h_n, h_m),$$

und wie wir bereits festgestellt haben, ist die gleichmäßige Konvergenz einer Funktionenfolge äquivalent zur Konvergenz bzgl. der Supremumsmetrik (siehe Bemerkung 2.1.7). Nun ist leicht einzusehen, dass aus $h_n \circ h_n^{-1} = h_n^{-1} \circ h_n = \text{id}_X$ für alle $n \in \mathbb{N}$ auch $h \circ k = \text{id}_X$ folgt, also $h \in \mathcal{H}(X)$. Also ist $(\mathcal{H}(X), \Delta^\pm)$ vollständig. \square

Wir können $(\mathcal{H}(X), \mathcal{T}_{CO})$ zwar auch durch Δ metrisieren, aber dieser Raum ist i. A. nicht vollständig. Betrachte dazu z. B. $X = [0, 1]$ und die Folge $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$,

$$h_n(x) = \begin{cases} (2 - \frac{1}{n})x & \text{für } x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{n}x + (1 - \frac{1}{n}) & \text{für } x > \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist h_n , wie man anhand der Ableitung sieht, streng monoton wachsend, und es gilt $h_n(0) = 0$ und $h_n(1) = 1$. Damit folgt $h_n \in \mathcal{H}(X)$.

$(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge in $(\mathcal{H}([0, 1]), \Delta)$, denn für alle $n, m \geq N$ ($N \in \mathbb{N}$ beliebig) gilt:

$$\begin{aligned}\Delta(h_n, h_m) &= \max \left\{ \sup_{x \in [0, \frac{1}{2}]} \left| \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right) x \right|, \sup_{x \in [\frac{1}{2}, 1]} \left| \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right) x + \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right) \right| \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right) \leq \frac{1}{N} \rightarrow 0.\end{aligned}$$

Der stetige Limes $h_\infty : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ von $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist jedoch gegeben durch

$$h_\infty(x) = \begin{cases} 2x & \text{für } x \leq \frac{1}{2} \\ 1 & \text{für } x > \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Offensichtlich gilt aber $h_\infty \notin \mathcal{H}([0, 1])$. Also ist $(\mathcal{H}([0, 1]), \Delta)$ nicht vollständig.

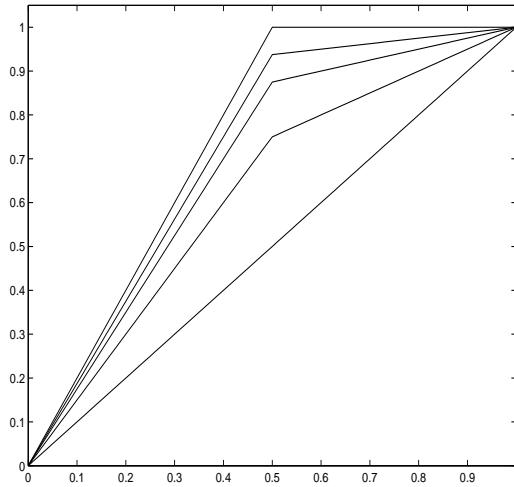


Abbildung 2.1: $h_n(x)$ für $n = 1, 2, 4, 8, \infty$.

Ist X nur lokal kompakt, so ist $(\mathcal{H}(X), \mathcal{T}_{CO})$ i. A. keine topologische Gruppe. Es gilt jedoch folgender Satz, dessen Beweis sich in [Ars 46, Theorem 4] findet:

2.2.2 Satz (Homöomorphismengruppen lokal kompakter Räume):
Es sei X ein lokal kompakter und lokal zusammenhängender Hausdorffraum. Dann ist $(\mathcal{H}(X), \mathcal{T}_{CO})$ eine hausdorffsche topologische Gruppe.

Zum Abschluss dieses Kapitels führen wir die folgenden für Gruppen üblichen Bezeichnungen für Teilmengen von $\mathcal{H}(X)$ ein:

$$\begin{aligned}H^{-1} &= \{h^{-1} \mid h \in H\}, \\ h \circ G &= \{h \circ g \mid g \in G\}, \\ G \circ h &= \{g \circ h \mid g \in G\}, \\ H \circ G &= \{h \circ g \mid h \in H, g \in G\}, \\ H^0 &= \mathcal{H}(X), \quad H^n = H \circ H^{n-1} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Kapitel 3

Überlagerungen

In diesem Kapitel wollen wir topologische und dynamische Eigenschaften von Überlagerungsabbildungen untersuchen. In den ersten drei Abschnitten werden wir dabei insbesondere die Liftbarkeit stetiger Selbstabbildungen eines kompakten Raums X zu Homöomorphismen einer „universellen Überlagerung“ \tilde{X} von X charakterisieren, und die vollständige Metrisierbarkeit von gewissen Funktionenräumen gelifteter Abbildungen nachweisen. Im vierten Abschnitt werden wir die Dynamik spezieller Überlagerungen, der sog. *expandierenden* Abbildungen, detailliert studieren.

3.1 Normale Projektionen und Liftungen

Wir wollen in diesem Abschnitt das Konzept der *normalen Überlagerung* (siehe Definition A.2.37) verallgemeinern. Dazu führen wir zunächst einige Begriffe ein.

3.1.1 Definition (Normale Projektion):

\tilde{X} sei ein lokal kompakter, lokal zusammenhängender, und X ein kompakter Hausdorffraum. Ferner sei $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ eine stetige, offene und surjektive Abbildung. Dann definieren wir die **Decktransformationengruppe** von π durch

$$\Gamma_\pi := \Gamma := \{\gamma \in \mathcal{H}(\tilde{X}) \mid \pi = \pi \circ \gamma\}.$$

Die Elemente von Γ heißen **Decktransformationen**. π heißt **normale Projektion**, falls Folgendes gilt:

- (1) Γ operiert eigentlich diskontinuierlich auf \tilde{X} , d. h. zu jeder kompakten Menge $\tilde{K} \subset \tilde{X}$ existieren nur endlich viele Decktransformationen $\gamma \in \Gamma$ mit $\gamma(\tilde{K}) \cap \tilde{K} \neq \emptyset$.
- (2) Γ operiert transitiv auf den Fasern von π , d. h. für alle $x \in X$ und $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in \pi^{-1}(x)$ existiert mindestens ein $\gamma \in \Gamma$ mit $\gamma(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$.

Eine Menge $\tilde{K} \subset \tilde{X}$ mit $\pi(\tilde{K}) = X$ heißt **Fundamentalbereich** von π . Eine Abbildung $\tilde{f} \in \mathcal{C}(\tilde{X})$ heißt **Liftung** einer Abbildung $f \in \mathcal{C}(X)$, falls $f \circ \pi = \pi \circ \tilde{f}$

gilt.¹ Ist dabei \tilde{f} ein Homöomorphismus, so definieren wir:

$$\tilde{f}^* : \Gamma \rightarrow \mathcal{H}(\tilde{X}), \quad \gamma \mapsto \tilde{f} \circ \gamma \circ \tilde{f}^{-1}.$$

3.1.2 Bemerkung:

Nach den Sätzen 2.2.2 und A.1.47 (a) ist Γ als Untergruppe und Teilraum von $(\mathcal{H}(\tilde{X}), \mathcal{T}_{CO})$ eine hausdorffsche topologische Gruppe.

3.1.3 Satz (Alternative Charakterisierung normaler Projektionen): \tilde{X} sei ein lokal kompakter, lokal zusammenhängender und X ein kompakter Hausdorffraum. Ferner sei $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ eine Abbildung und Γ sei die Gruppe der Homöomorphismen $\gamma \in \mathcal{H}(\tilde{X})$ mit $\pi = \pi \circ \gamma$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (a) π ist eine normale Projektion.
- (b) Γ operiert eigentlich diskontinuierlich auf \tilde{X} und die Abbildung

$$\varphi : \tilde{X}/\Gamma \rightarrow X, \quad \Gamma\tilde{x} \mapsto \pi(\tilde{x}),$$

ist ein Homöomorphismus.

Das folgende kommutative Diagramm veranschaulicht die Bedeutung von φ .

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\pi} & X \\ & \searrow \text{pr}_\Gamma & \uparrow \varphi \\ & & \tilde{X}/\Gamma \end{array}$$

Beweis:

(a) \Rightarrow (b): Sei $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ eine normale Projektion. Seien $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{X}$ Punkte mit $\Gamma\tilde{x} = \Gamma\tilde{y}$. Dann existiert ein $\gamma \in \Gamma$ mit $\tilde{y} = \gamma(\tilde{x})$. Daraus folgt $\pi(\tilde{x}) = \pi(\tilde{y})$. Also ist φ wohldefiniert. Gilt umgekehrt $\pi(\tilde{x}) = \pi(\tilde{y})$, so existiert ein $\gamma \in \Gamma$ mit $\gamma(\tilde{x}) = \tilde{y}$, da Γ transitiv auf den Fasern von π operiert. Damit folgt $\Gamma\tilde{x} = \Gamma\tilde{y}$. Also ist φ injektiv. Aus der Surjektivität von π und der offensichtlich gültigen Identität $\pi = \varphi \circ \text{pr}_\Gamma$, wobei pr_Γ die kanonische Projektion $\tilde{X} \rightarrow \tilde{X}/\Gamma$ bezeichnet, folgt die Surjektivität von φ , denn

$$\varphi(\tilde{X}/\Gamma) = \varphi(\text{pr}_\Gamma(\text{pr}_\Gamma^{-1}(\tilde{X}/\Gamma))) = \pi(\tilde{X}) = X.$$

Ferner folgt aus $\pi = \varphi \circ \text{pr}_\Gamma$ und der Offenheit von π und pr_Γ auch die Stetigkeit von φ und φ^{-1} , denn für beliebige (und damit insbesondere für offene) Mengen $U \subset \tilde{X}/\Gamma$ und $V \subset X$ gilt

$$\begin{aligned} \varphi(U) &= \varphi(\text{pr}_\Gamma(\text{pr}_\Gamma^{-1}(U))) = \pi(\text{pr}_\Gamma^{-1}(U)), \\ \varphi^{-1}(V) &= \text{pr}_\Gamma(\text{pr}_\Gamma^{-1}(\varphi^{-1}(V))) = \text{pr}_\Gamma(\pi^{-1}(V)). \end{aligned}$$

(b) \Rightarrow (a): Nun setzen wir voraus, dass φ ein Homöomorphismus ist und dass Γ eigentlich diskontinuierlich operiert. Dann ist π als Komposition von φ und pr_Γ stetig, offen und surjektiv. Für beliebige Punkte $\tilde{x}, \tilde{y} \in \pi^{-1}(z)$ gilt $\varphi(\text{pr}_\Gamma(\tilde{x})) = \varphi(\text{pr}_\Gamma(\tilde{y}))$ und da φ injektiv ist, folglich $\tilde{x} = \gamma(\tilde{y})$ für ein $\gamma \in \Gamma$. Also operiert Γ transitiv auf den Fasern von π , was zeigt, dass π eine normale Projektion ist. \square

¹ Mit anderen Worten: π ist eine Semikonjugation von \tilde{f} nach f .

3.1.4 Bemerkung:

Insbesondere ist nach Satz 3.1.3 jede kanonische Projektion $\text{pr}_\Gamma : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}/\Gamma$ eine normale Projektion, falls \tilde{X} ein lokal zusammenhängender, lokal kompakter Hausdorffraum ist und falls Γ eigentlich diskontinuierlich auf \tilde{X} operiert mit kompaktem Orbitraum \tilde{X}/Γ . Der Orbitraum ist dann auch hausdorffsch nach [Thr 02, Prop. 8.2.2, S. 174].

3.1.5 Definition (Reguläre/Singuläre Werte, Isotropiegruppe):

Sei $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ eine normale Projektion. Ein Punkt $x \in X$ heißt **regulärer Wert** von π , falls x eine gleichmäßig überlagerte Umgebung besitzt, d. h. eine offene Umgebung U , so dass $\pi^{-1}(U)$ die disjunkte Vereinigung offener Mengen ist, die alle homöomorph auf U abgebildet werden. Andernfalls nennen wir x einen **singulären Wert**. Die Menge der singulären Werte von π bezeichnen wir mit Σ_π . Ferner definieren wir für jedes $\tilde{x} \in \tilde{X}$ die Menge

$$\Gamma_{\tilde{x}} := \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(\tilde{x}) = \tilde{x}\}.$$

Offensichtlich ist $\Gamma_{\tilde{x}}$ eine Untergruppe von Γ , die **Isotropiegruppe** von \tilde{x} .

3.1.6 Satz (Elementare Eigenschaften normaler Projektionen):

Sei $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ eine normale Projektion. Dann gilt:

- (a) Die Menge Σ_π der singulären Werte ist kompakt.
- (b) Ist $x \in X$ und $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in \pi^{-1}(x)$, so sind $\Gamma_{\tilde{x}_1}$ und $\Gamma_{\tilde{x}_2}$ endliche, zueinander konjugierte Untergruppen von Γ .
- (c) $\pi^{-1}(x)$ ist diskret für alle $x \in X$.
- (d) Es existiert ein kompakter Fundamentalbereich von π .

Beweis:

- (a) Die Menge der regulären Werte ist offen in X , da eine gleichmäßig überlagerte Umgebung U eines Punktes $x \in X$ zugleich eine gleichmäßig überlagerte Umgebung aller Punkte $z \in U$ ist. Also ist das Komplement Σ_π abgeschlossen und damit kompakt nach Satz A.1.22 (c).
- (b) Da Γ eigentlich diskontinuierlich auf \tilde{X} operiert, gibt es zu jedem $\tilde{x} \in \tilde{X}$ nur endlich viele $\gamma \in \Gamma$ mit $\gamma(\tilde{x}) = \tilde{x}$. Daher sind alle Isotropiegruppen endlich. Ist $\gamma \in \Gamma$ eine Decktransformation mit $\gamma(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$, so ist klar, dass $\Gamma_{\tilde{x}_2} = \gamma \circ \Gamma_{\tilde{x}_1} \circ \gamma^{-1}$ gilt. Da Γ transitiv auf den Fasern von π operiert, existiert stets ein solches γ , falls $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in \pi^{-1}(x)$.
- (c) Es sei $x \in X$ beliebig gewählt. Wir nehmen an, \tilde{x} wäre ein Häufungspunkt von $\pi^{-1}(x)$. Da $\pi^{-1}(x)$ abgeschlossen ist, gilt dann $\pi(\tilde{x}) = x$. Nun sei \tilde{K} eine kompakte Umgebung von \tilde{x} . Dann liegen unendlich viele Elemente von $\pi^{-1}(x)$ in \tilde{K} . Da Γ eigentlich diskontinuierlich auf \tilde{X} operiert, liegen aber nur endlich viele Translate von \tilde{x} in \tilde{K} . Ist φ der Homöomorphismus aus Satz 3.1.3, so folgt der Widerspruch

$$\pi^{-1}(x) = \text{pr}_\Gamma^{-1}(\varphi^{-1}(x)) = \text{pr}_\Gamma^{-1}(\varphi^{-1}(\pi(\tilde{x}))) = \text{pr}_\Gamma^{-1}(\Gamma \tilde{x}) = \Gamma \tilde{x}.$$

Also ist $\pi^{-1}(x)$ diskret.

- (d) Seien $x \in X$ und $\tilde{x} \in \pi^{-1}(x)$ beliebig gewählt. Dann existiert eine kompakte Umgebung $K_{\tilde{x}}$ von \tilde{x} , die invariant unter $\Gamma_{\tilde{x}}$ ist und disjunkt von allen Translates $\gamma(K_{\tilde{x}})$ mit $\gamma \notin \Gamma_{\tilde{x}}$. Diese konstruiert man folgendermaßen: Für eine beliebige kompakte Umgebung K_0 von \tilde{x} existieren nur endlich viele $\gamma_1, \dots, \gamma_m \in \Gamma \setminus \Gamma_{\tilde{x}}$ mit $\gamma_i(K_0) \cap K_0 \neq \emptyset$. Da \tilde{X} hausdorffsch ist, finden wir Umgebungen U_i der Punkte $\gamma_i(\tilde{x})$ und eine Umgebung $U_0 \subset K_0$ von \tilde{x} , so dass die Mengen U_0, U_1, \dots, U_m paarweise disjunkt sind. Nun finden wir zu jedem $i \in \{1, \dots, m\}$ eine kompakte Umgebung $V_i \subset U_0$ mit $\gamma_i(V_i) \subset U_i$. Sei $\Gamma_{\tilde{x}} = \{\gamma_{m+1}, \dots, \gamma_n\}$. Dann finden wir zu jedem $i \in \{m+1, \dots, n\}$ eine kompakte Umgebung $V_i \subset U_0$ mit $\gamma_i(V_i) \subset \bigcap_{j=1}^m V_j$. Definieren wir $K_1 := \bigcap_{i=1}^n V_i$, so ist K_1 eine kompakte Umgebung von \tilde{x} , so dass die Menge

$$K_{\tilde{x}} := \Gamma_{\tilde{x}}(K_1) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma_{\tilde{x}}} \gamma(K_1) = \bigcup_{i=m+1}^n \gamma_i(K_1)$$

disjunkt von allen Translates mit Elementen $\gamma \in \Gamma \setminus \Gamma_{\tilde{x}}$ ist. Nach Konstruktion ist $K_{\tilde{x}}$ auch invariant unter $\Gamma_{\tilde{x}}$.

Die Menge $K_x := \pi(K_{\tilde{x}})$ ist eine kompakte Umgebung von x (da π offen und stetig ist) und $\pi^{-1}(K_x)$ zerfällt in disjunkte kompakte Mengen $\gamma(K_{\tilde{x}})$, die surjektiv auf K_x abgebildet werden. Da X kompakt ist, können wir X mit endlich vielen der Umgebungen K_x überdecken, etwa K_{x_1}, \dots, K_{x_l} . Wählen wir aus $\pi^{-1}(K_{x_i})$ jeweils genau eine Komponente \tilde{K}_i aus, so ist $\tilde{K} := \bigcup_{i=1}^l \tilde{K}_i$ kompakt und es gilt

$$\pi(\tilde{K}) = \bigcup_{i=1}^l \pi(\tilde{K}_i) = \bigcup_{i=1}^l K_{x_i} = X.$$

Also ist \tilde{K} ein kompakter Fundamentalbereich für π . \square

Folgender Satz stellt den Zusammenhang zwischen normalen Projektionen und normalen Überlagerungen her.

3.1.7 Satz (Normale Projektionen und normale Überlagerungen):
Seien \tilde{X} und X wegzusammenhängende und lokal wegzusammenhängende Hausdorffräume, \tilde{X} lokal kompakt und X kompakt. Dann gilt:

- (a) Eine normale Überlagerung $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ ist eine normale Projektion.
- (b) Eine normale Projektion $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ ist eine normale Überlagerung, falls Γ frei auf \tilde{X} operiert.

Beweis:

- (a) Als Überlagerung ist π stetig, offen und surjektiv, und nach Satz A.2.37 operiert Γ transitiv auf den Fasern von π . Nach Satz A.2.33 operiert Γ auch eigentlich diskontinuierlich auf \tilde{X} .
- (b) Siehe [Thr 02, Prop. 8.2.2, S. 174]. \square

3.1.8 Satz (Liftungseigenschaften normaler Projektionen):

Es sei $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ eine normale Projektion. Dann gilt:

- (a) Ist für eine stetige Abbildung $\tilde{f} \in \mathcal{C}(\tilde{X})$ und einen Endomorphismus $\varphi : \Gamma \rightarrow \Gamma$ die Identität $\tilde{f} \circ \gamma \equiv \varphi(\gamma) \circ \tilde{f}$ erfüllt, so ist \tilde{f} Liftung einer eindeutig bestimmten stetigen Abbildung $f \in \mathcal{C}(X)$.
- (b) Sind $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 \in \mathcal{H}(\tilde{X})$ Liftungen von $f_1, f_2 \in \mathcal{C}(X)$, so ist $\tilde{f}_1 \circ \tilde{f}_2$ eine Liftung von $f_1 \circ f_2$, und es gilt $(\tilde{f}_1 \circ \tilde{f}_2)^* = \tilde{f}_1^* \circ \tilde{f}_2^*$.
- (c) Ein Homöomorphismus $\tilde{f} \in \mathcal{H}(\tilde{X})$ ist genau dann Liftung einer stetigen Abbildung $f \in \mathcal{C}(X)$, falls $\tilde{f}^* \in \text{End}(\Gamma)$ und genau dann Liftung eines Homöomorphismus, falls $\tilde{f}^* \in \text{Aut}(\Gamma)$.
- (d) Ist π die universelle Überlagerung und $f \in \mathcal{C}(X)$ eine Überlagerung, so ist jede Liftung \tilde{f} von f ein Homöomorphismus.

Beweis:

- (a) Wir definieren

$$f(\pi(\tilde{x})) := \pi(\tilde{f}(\tilde{x})) \quad \text{für alle } \tilde{x} \in \tilde{X}.$$

Da π surjektiv ist, ist damit f auf ganz X erklärt. f ist auch wohldefiniert, denn aus $\pi(\tilde{x}) = \pi(\tilde{y})$ folgt die Existenz eines $\gamma \in \Gamma$ mit $\tilde{y} = \gamma(\tilde{x})$. Damit ergibt sich

$$\pi \circ \tilde{f}(\tilde{y}) = \pi \circ \tilde{f} \circ \gamma(\tilde{x}) = \pi \circ \varphi(\gamma) \circ \tilde{f}(\tilde{x}) = \pi \circ \tilde{f}(\tilde{x}).$$

Für jede offene Menge $U \subset X$ gilt aufgrund der Surjektivität von π :

$$f^{-1}(U) = \pi(\pi^{-1}(f^{-1}(U))) = \pi(\tilde{f}^{-1}(\pi^{-1}(U))).$$

Da π stetig und offen ist, ist damit auch $f^{-1}(U)$ offen. Also ist f stetig. Die Eindeutigkeit von f ist offensichtlich.

- (b) Offensichtlich gilt $f_1 \circ f_2 \circ \pi = \pi \circ \tilde{f}_1 \circ \tilde{f}_2$ und

$$(f_1 \circ f_2)^*(\gamma) = f_1 \circ f_2 \circ \gamma \circ f_2^{-1} \circ f_1^{-1} = f_1^* \circ f_2^*(\gamma).$$

- (c) Sei \tilde{f} eine Liftung von f und $\gamma \in \Gamma$. Dann gilt

$$\pi \circ \tilde{f} = f \circ \pi = f \circ \pi \circ \gamma = \pi \circ \tilde{f} \circ \gamma.$$

Also folgt $\pi = \pi \circ \tilde{f} \circ \gamma \circ \tilde{f}^{-1}$ und damit $\tilde{f}^*(\gamma) = \tilde{f} \circ \gamma \circ \tilde{f}^{-1} \in \Gamma$. Für beliebige $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ gilt

$$\begin{aligned} \tilde{f}^*(\gamma_1 \circ \gamma_2) &= \tilde{f} \circ \gamma_1 \circ \gamma_2 \circ \tilde{f}^{-1} \\ &= (\tilde{f} \circ \gamma_1 \circ \tilde{f}^{-1}) \circ (\tilde{f} \circ \gamma_2 \circ \tilde{f}^{-1}) = \tilde{f}^*(\gamma_1) \circ \tilde{f}^*(\gamma_2). \end{aligned}$$

Also ist \tilde{f}^* ein Endomorphismus. Die Umkehrung folgt aus (a). Ist $f \in \mathcal{H}(X)$, so ist \tilde{f}^{-1} eine Liftung von f^{-1} , denn aus $f \circ \pi = \pi \circ \tilde{f}$ folgt $f^{-1} \circ \pi = \pi \circ \tilde{f}^{-1}$. Es ist $(\tilde{f}^{-1})^*$ offensichtlich invers zu \tilde{f}^* . Ist umgekehrt

$\tilde{f} \in \mathcal{H}(\tilde{X})$ ein Homöomorphismus mit $\tilde{f}^* \in \text{Aut}(\Gamma)$, so ist die durch $f(\pi(\tilde{x})) := \pi(\tilde{f}(\tilde{x}))$ definierte Funktion $f : X \rightarrow X$ stetig, aber auch die durch $g(\pi(\tilde{x})) := \pi(\tilde{f}^{-1}(\tilde{x}))$ definierte Funktion $g : X \rightarrow X$. Folglich gilt: $g \circ f \circ \pi = f \circ g \circ \pi = \pi$. Aus der Surjektivität von π folgt $g \circ f = f \circ g = \text{id}_X$. Also ist \tilde{f} Liftung eines Homöomorphismus.

- (d) Sind f und π Überlagerungen, so auch $f \circ \pi : \tilde{X} \rightarrow X$. Wird nämlich $U \subset X$ von f gleichmäßig überlagert und sind V_1, \dots, V_n die disjunkten Blätter über U (da X kompakt ist, gibt es nur endlich viele), so existieren von π gleichmäßig überlagerte Umgebungen $W_i \subset V_i$, $i = 1, \dots, n$. Setze $\tilde{U} := \bigcap_{i=1}^n f(W_i) \subset U$. Dann wird \tilde{U} von $f \circ \pi$ gleichmäßig überlagert. Sei $p = f \circ \pi = \pi \circ \tilde{f}$. Dann ist auch p eine universelle Überlagerung von X . Da je zwei universelle Überlagerungen nach Satz A.2.28 äquivalent sind, gilt andererseits $p = \pi \circ \tilde{h}$ für einen Homöomorphismus $\tilde{h} \in \mathcal{H}(\tilde{X})$, also $\pi \circ \tilde{h} = \pi \circ \tilde{f}$ oder $\pi = \pi \circ \tilde{f} \circ \tilde{h}^{-1}$. Sei nun $\tilde{x} \in \tilde{X}$ beliebig und $\tilde{y} = \tilde{f}(\tilde{h}^{-1}(\tilde{x}))$. Dann existiert eine Decktransformation $\gamma \in \Gamma$ mit $\gamma(\tilde{y}) = \tilde{x}$. Es folgt $\pi = \pi \circ \gamma = \pi \circ \tilde{f} \circ \tilde{h}^{-1} \circ \gamma$ oder $\pi \circ \gamma^{-1} \circ \tilde{h} = \pi \circ \tilde{f}$. Ferner gilt mit $\tilde{z} := \tilde{h}^{-1}(\gamma(\tilde{y}))$:

$$\tilde{f}(\tilde{z}) = \tilde{f}(\tilde{h}^{-1}(\gamma(\tilde{y}))) = \tilde{y} = \gamma^{-1} \circ \tilde{h}(\tilde{h}^{-1}(\gamma(\tilde{y}))) = \gamma^{-1} \circ \tilde{h}(\tilde{z}).$$

Nach dem Eindeutigkeitssatz A.2.21 für Liftungen folgt $\tilde{f} = \gamma^{-1} \circ \tilde{h}$. Also ist \tilde{f} ein Homöomorphismus. \square

Nun wollen wir uns der Einfachheit halber auf den Fall normaler Projektionen $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ beschränken, für die \tilde{M} eine einfach zusammenhängende topologische Mannigfaltigkeit ist. Dann ist natürlich M als stetiges Bild von \tilde{M} wegzusammenhängend und nach Satz A.1.22 (b) metrisierbar. Im Allgemeinen ist M keine (unberandete) topologische Mannigfaltigkeit. Jedoch besitzt jeder Punkt in M eine Umgebung, die homöomorph zu einem Orbitraum U/G ist, wobei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und G eine endliche Gruppe ist, die auf U operiert. Dies folgt daraus, dass M lokal homöomorph zum \mathbb{R}^n ist und dass nach dem Beweis von Satz 3.1.6 (d) jeder Punkt in \tilde{M} eine Umgebung besitzt, die invariant unter seiner Isotropiegruppe ist.

3.1.9 Beispiel:

Betrachte $\pi : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$, $\pi(x) = \cos(2\pi x)$. Dann ist Γ gegeben durch

$$\Gamma = \{\gamma_n^\pm\}_{n \in \mathbb{Z}} \text{ mit } \gamma_n^\pm(x) \equiv n \pm x.$$

Dass $\pi = \pi \circ \gamma_n^\pm$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt, folgt aus den Symmetrieeigenschaften der Cosinusfunktion. Gilt umgekehrt $\pi = \pi \circ \gamma$ für einen Homöomorphismus $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, so folgt

$$\cos(2\pi x) = \cos(2\pi \gamma(x)) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Also gilt insbesondere $1 = \cos(2\pi \gamma(0))$, d. h. $n_0 := \gamma(0) \in \mathbb{Z}$. Wir betrachten die Einschränkung $\pi|_{[0, \frac{1}{2}]} = \pi \circ \gamma|_{[0, \frac{1}{2}]} : [0, \frac{1}{2}] \rightarrow [-1, 1]$. Da diese bijektiv ist, muss auch $\pi|_{\gamma([0, \frac{1}{2}])}$ bijektiv sein; folglich gilt $\gamma([0, \frac{1}{2}]) = [n_0, n_0 + \frac{1}{2}]$, falls γ monoton

wächst, und andernfalls $\gamma([0, \frac{1}{2}]) = [n_0 - \frac{1}{2}, n_0]$. Im monoton wachsenden Fall folgt sofort

$$\gamma(x) = (\pi|_{[n_0, n_0 + \frac{1}{2}]})^{-1} \circ \pi(x) = x + n_0 \quad \text{für } x \in [0, \frac{1}{2}].$$

Andernfalls gilt

$$\gamma(x) = (\pi|_{[n_0 - \frac{1}{2}, n_0]})^{-1} \circ \pi(x) = n_0 - x \quad \text{für } x \in [0, \frac{1}{2}].$$

Aufgrund der Symmetrien der Cosinusfunktion muss auch $\gamma(x) = x + n_0$ bzw. $\gamma(x) = n_0 - x$ auf ganz \mathbb{R} gelten. Offensichtlich ist π offen und surjektiv (Die Offenheit folgt z. B. daraus, dass f die Einschränkung einer nichtkonstanten holomorphen Funktion ist). Dass Γ eigentlich diskontinuierlich auf \mathbb{R} und transitiv auf den Fasern von π operiert, ist leicht ersichtlich. \diamond

3.1.10 Satz (Charakterisierung regulärer Werte):

Ein Punkt $x \in M$ ist genau dann ein regulärer Wert, wenn für einen und damit für alle $\tilde{x} \in \pi^{-1}(x)$ die Isotropiegruppe $\Gamma_{\tilde{x}}$ trivial ist.

Beweis:

Sei $x \in M$ regulär und $\tilde{x} \in \pi^{-1}(x)$ beliebig. Dann existieren offene Umgebungen U von x und V von \tilde{x} , so dass $\pi|_V: V \rightarrow U$ ein Homöomorphismus ist. Sei $\gamma \in \Gamma_{\tilde{x}}$ beliebig gewählt. Angenommen $\gamma(\tilde{y}) \neq \tilde{y}$ für ein $\tilde{y} \in V$, das nahe genug bei \tilde{x} liegt, so dass $\gamma(\tilde{y}) \in V$ gilt. Dann würde $\pi(\tilde{y}) = \pi(\gamma(\tilde{y}))$ gelten im Widerspruch zur Injektivität von $\pi|_V$. Also stimmt jedes $\gamma \in \Gamma_{\tilde{x}}$ in einer kleinen Umgebung von \tilde{x} mit der Identität überein. Nach [Thr 02, S. 303] ist jeder Homöomorphismus einer Mannigfaltigkeit, der von endlicher Ordnung ist, bereits die Identität, wenn er auf einer nichtleeren offenen Menge mit der Identität übereinstimmt. Da jedes $\gamma \in \Gamma_{\tilde{x}}$ als Element einer endlichen Untergruppe von endlicher Ordnung ist, folgt $\Gamma_{\tilde{x}} = \{\text{id}\}$.

Nun sei umgekehrt $\Gamma_{\tilde{x}}$ als trivial vorausgesetzt. Nach Satz 3.1.6 sind dann die Isotropiegruppen aller Punkte in $\pi^{-1}(x)$ trivial. Damit ist klar, dass π bei jedem dieser Punkte lokal injektiv und wegen der Offenheit folglich ein lokaler Homöomorphismus ist. Da Γ eigentlich diskontinuierlich auf M operiert, kann man eine offene Umgebung V von \tilde{x} wählen, die disjunkt von allen ihren Translates ist, also $V \cap \gamma(V) = \emptyset$ für alle $\gamma \neq \text{id}$. Dann gilt für jedes $\gamma' \in \Gamma$ und $\gamma \neq \text{id}$ auch

$$\gamma\gamma'(V) \cap \gamma'(V) = \gamma'(\gamma'^{-1}\gamma\gamma'(V) \cap V) = \emptyset.$$

Also sind die Mengen $\gamma(V)$, $\gamma \in \Gamma$, offene Umgebungen der Punkte aus $\pi^{-1}(x)$, die alle das gleiche homöomorphe Bild unter π haben. Damit ist gezeigt, dass x eine gleichmäßig überlagerte Umgebung besitzt. \square

3.1.11 Bemerkungen:

- Im Beweis von [Thr 02, Prop. 13.2.1, S. 302] wird die Gültigkeit der folgenden allgemeineren Aussage nachgewiesen: Jeder Punkt $x \in M$ besitzt eine offene zusammenhängende Umgebung U , deren Urbild in disjunkte offene

Mengen V_j zerfällt, und die Einschränkung von π auf jede dieser Mengen V_j ist bis auf einen Homöomorphismus die Projektion $V_j \rightarrow V_j/\Gamma_{\tilde{x}_j}$, wobei \tilde{x}_j das Urbild von x in V_j bezeichnet.

- Die normale Projektion $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ induziert auf M die Struktur einer sog. *Orbifaltigkeit*.² (siehe Definition A.5.4 und Satz A.5.5). Der Raum M kann eine topologische Mannigfaltigkeit sein, falls etwa die Gruppen Γ_j alle frei operieren, aber er kann z. B. auch eine topologische Mannigfaltigkeit mit Rand sein, wie wir in Beispiel 3.1.9 gesehen haben.

3.1.12 Vereinbarung:

Der Einfachheit halber sei ab jetzt stets vorausgesetzt, dass Σ_π endlich ist.

Der folgende Satz charakterisiert diejenigen Abbildungen, die sich zu Homöomorphismen liften lassen. Er besagt, dass die lokale Liftbarkeit bereits ausreicht, um die globale Liftbarkeit zu garantieren.

3.1.13 Satz (Liftbarkeitskriterium):

Sei $f : M \rightarrow M$ stetig. Ferner besitze jeder Punkt $y \in M$ eine offene zusammenhängende Umgebung U_y , so dass $f^{-1}(U_y)$ in Zusammenhangskomponenten V_1, \dots, V_n zerfällt, wobei $f^{-1}(y) \cap V_i = \{x_i\}$, für die folgendes gilt: Für einen beliebigen Punkt $\tilde{x} \in \pi^{-1}(x_i)$ (und damit für alle) existiert eine Umgebung \tilde{V} von \tilde{x} und ein Homöomorphismus $\psi : \tilde{V} \rightarrow \tilde{U}$ auf eine offene Menge $\tilde{U} \subset \tilde{M}$ mit $\pi^{-1}(y) \cap \tilde{U} = \{\tilde{y}\}$, so dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{V} & \xrightarrow{\psi} & \tilde{U} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ V_i & \xrightarrow{f} & U_y \end{array} \quad (3.1)$$

Dann ist f zu einem Homöomorphismus $\tilde{f} : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$ liftbar.

3.1.14 Bemerkungen:

- Trivialerweise gilt auch die Umkehrung des Satzes. Ist nämlich $\tilde{f} \in \mathcal{H}(\tilde{M})$ eine Liftung von f , so kann man φ stets als Einschränkung von \tilde{f} wählen.
- Insbesondere gilt für eine liftbare Abbildung: Ist $y \in M \setminus \Sigma_\pi$ und $f^{-1}(y) \subset M \setminus \Sigma_\pi$, so besitzt y eine von f gleichmäßig überlagerte Umgebung.

Beweis von Satz 3.1.13:

Um zu zeigen, dass f eine stetige Liftung $\tilde{f} : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$ besitzt, wollen wir Satz A.5.8 anwenden. Dazu bemerken wir zunächst, dass $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ die Rolle einer universellen Überlagerung spielt, wenn wir M mit der von der Projektion $\tilde{M} \rightarrow \tilde{M}/\Gamma \cong M$ induzierten Orbifaltigkeitsstruktur versehen (siehe dazu [Thr 02], S. 302-303). Nun müssen wir zeigen, dass $f \circ \pi : \tilde{M} \rightarrow M$ eine Orbifaltigkeitsüberlagerung ist. Dazu seien $y \in M$ und $\tilde{y} \in \pi^{-1}(y)$ beliebig gewählt.

²engl.: „orbifold“, abgeleitet von „manifold“.

Dann existieren offene zusammenhängende Umgebungen U von y und \tilde{U} von \tilde{y} , so dass U homöomorph zu $\tilde{U}/\Gamma_{\tilde{y}}$ ist. Nach Voraussetzung können wir U klein genug wählen, dass jede Komponente \tilde{V} von $(f \circ \pi)^{-1}(U)$ homöomorph zu $\tilde{U} = \tilde{U}/\{\text{id}\}$ ist. Daher ist $f \circ \pi$ eine Orbifaltigkeitsüberlagerung im Sinne von Definition A.5.7. Nach Satz A.5.8 existiert daher eine Liftung $\tilde{f} : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$, die eine Orbifaltigkeitsüberlagerung ist. Da die singuläre Menge von \tilde{M} leer ist, ist \tilde{f} eine gewöhnliche Überlagerungsabbildung. Da zudem \tilde{M} einfach zusammenhängend ist, ist damit \tilde{f} nach Satz A.2.16 (g) ein Homöomorphismus. \square

3.1.15 Lemma (Vorwärtsinvarianz von Σ_π):

Für eine zu einem Homöomorphismus liftbare Abbildung $f : M \rightarrow M$ gilt $f(\Sigma_\pi) \subset \Sigma_\pi$.

Beweis:

Sei $x \in \Sigma_\pi$. Angenommen $f(x) \notin \Sigma_\pi$. Dann kann kein kommutatives Diagramm der Form (3.1) existieren, da stets $\pi \circ \varphi$ (lokal) ein Homöomorphismus ist, aber nicht $f \circ \pi$. \square

Zum Abschluss dieses Abschnitts führen wir noch einige Bezeichnungen ein. Für jede normale Projektion $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ und jeden Automorphismus $\varphi \in \text{Aut}(\Gamma)$ definieren wir:

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_L(\tilde{X}, \varphi) &:= \{\tilde{f} \in \mathcal{C}(\tilde{X}) \mid \tilde{f} \circ \gamma \equiv \varphi(\gamma) \circ \tilde{f}\}, \\ \mathcal{H}_L(\tilde{X}, \varphi) &:= \mathcal{C}_L(\tilde{X}, \varphi) \cap \mathcal{H}(\tilde{X}).\end{aligned}$$

$\mathcal{C}_L(\tilde{X}, \varphi)$ ist also nach Satz 3.1.8 die Menge derjenigen Liftungen stetiger Abbildungen $f : X \rightarrow X$, die auf Γ den Automorphismus φ induzieren. $\mathcal{H}_L(\tilde{X}, \varphi)$ ist die Menge der Homöomorphismen mit dieser Eigenschaft. Mit $\mathcal{H}_L(\tilde{X})$ bezeichnen wir die Menge aller Homöomorphismen von \tilde{X} , die Liftungen stetiger Abbildungen sind.

3.2 Universelle Überlagerung und Selbstüberlagerungen

In diesem Abschnitt wollen wir im Wesentlichen zwei Resultate beweisen. Das erste beschreibt Eigenschaften der universellen Überlagerungen von kompakten Längenräumen, das zweite stellt einen Zusammenhang zwischen der Wirkung einer Abbildung $f : X \rightarrow X$ auf $\pi_1(X)$ und der Wirkung einer Liftung von f auf der Decktransformationengruppe $D(\pi)$ der universellen Überlagerung $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ her.

3.2.1 Satz (Universelle Überlagerung kompakter Längenräume):

Es sei (X, d) ein hinreichend zusammenhängender kompakter Längenraum³ und

³Damit ein Längenraum hinreichend zusammenhängend ist, reicht es, dass er semilokal einfach zusammenhängend ist, denn ein Längenraum ist stets global und lokal wegzusammenhängend. Siehe dazu auch [Bur 01, Aufgabe 2.1.9, S. 29].

$\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ die universelle Überlagerung von X . Dann existiert eine Metrik \tilde{d} auf \tilde{X} , so dass (\tilde{X}, \tilde{d}) ein vollständiger geodätischer Raum ist. Die von \tilde{d} induzierte Topologie stimmt mit der gegebenen überein. Darüber hinaus ist π bzgl. dieser Metrik eine lokale Isometrie und die Decktransformationen von π sind Isometrien. Wir nennen \tilde{d} die nach \tilde{X} geliftete Metrik.

Beweis:

Für beliebige $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{X}$ setzen wir

$$\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) := \inf \{L(\pi \circ \tilde{c}) \mid \tilde{c} : I \rightarrow \tilde{X} \text{ Weg von } \tilde{x} \text{ nach } \tilde{y}\}.$$

Dann ist \tilde{d} die gewünschte Metrik, wie wir im Folgenden zeigen.

- (i) Ist $\tilde{x} = \tilde{y}$ und $c_0(t) := \tilde{x}$, so gilt $L(\pi \circ c_0) = 0$, also $\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$. Nun gelte $\tilde{x} \neq \tilde{y}$. Gilt darüberhinaus $\pi(\tilde{x}) \neq \pi(\tilde{y})$, so ist klar, dass $\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) > 0$. Wir können also $\pi(\tilde{x}) = \pi(\tilde{y})$ annehmen. Dann finden wir eine gleichmäßig überlagerte Umgebung U von $\pi(\tilde{x})$ und disjunkte offene Umgebungen \tilde{V}_1 von \tilde{x} und \tilde{V}_2 von \tilde{y} , die über U liegen. Wir können $U = B(\pi(\tilde{x}), \varepsilon)$ für ein $\varepsilon > 0$ annehmen. Nun ist klar, dass für jeden Weg $\tilde{c} : I \rightarrow \tilde{X}$ von \tilde{x} nach \tilde{y} der Weg $\pi \circ \tilde{c}$ mindestens die Länge 2ε hat, also gilt $\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) > 0$.
- (ii) \tilde{d} ist symmetrisch, da durch $c \mapsto c^{-1}$ eine bijektive Abbildung zwischen den Wegen von \tilde{x} nach \tilde{y} und denen von \tilde{y} nach \tilde{x} gegeben ist. Darüberhinaus gilt natürlich $L(\pi \circ c) = L(\pi \circ c^{-1})$.
- (iii) Seien $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} \in \tilde{X}$. Ist c_1 ein Weg von \tilde{x} nach \tilde{y} und c_2 ein Weg von \tilde{y} nach \tilde{z} , so verläuft der Produktweg $c_1 c_2$ von \tilde{x} nach \tilde{z} . Es folgt

$$\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{z}) \leq L(\pi \circ c_1 c_2) = L(\pi \circ c_1) + L(\pi \circ c_2).$$

Betrachten wir Folgen c_1^k, c_2^k , so dass $L(\pi \circ c_1^k) \rightarrow \tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y})$ und $L(\pi \circ c_2^k) \rightarrow \tilde{d}(\tilde{y}, \tilde{z})$, so bekommen wir für jedes $\delta > 0$ ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{z}) \leq L(\pi \circ c_1^k) + L(\pi \circ c_2^k) = \tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) + \tilde{d}(\tilde{y}, \tilde{z}) + \delta$$

für alle $k \geq k_0$. Für $\delta \rightarrow 0$ erhalten wir die Dreiecksungleichung.

- (iv) $\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) < \infty$: Wie wir noch zeigen werden, ist π eine lokale Isometrie. Also ist die Endlichkeit von \tilde{d} sicherlich lokal gegeben. Mit Hilfe der Dreiecksungleichung folgt (durch Einführung hinreichend vieler Zwischenpunkte) daraus auch die globale Endlichkeit von \tilde{d} .

Wir zeigen als nächstes, dass π eine lokale Isometrie ist. Sei dazu $\tilde{x} \in \tilde{X}$ und $x = \pi(\tilde{x})$. Sei U eine gleichmäßig überlagerte Umgebung von x und V das Blatt über x , welches \tilde{x} enthält. Dann ist $\pi|_V : V \rightarrow U$ ein Homöomorphismus. Sei $\varphi := (\pi|_V)^{-1} : U \rightarrow V$. Wir wählen ein $\varepsilon > 0$, so dass $B(x, 2\varepsilon) \subset U$ gilt. Seien $y, z \in B(x, \varepsilon)$. Sei $c : [0, 1] \rightarrow B(x, 2\varepsilon)$ ein Weg von y nach z mit $L(c) = d(y, z)$. Dann ist $\tilde{c} := \varphi \circ c$ ein Weg von $\varphi(y)$ nach $\varphi(z)$ mit $\pi \circ \tilde{c} = c$ und folglich gilt

$$\tilde{d}(\varphi(y), \varphi(z)) \leq L(\pi \circ \tilde{c}) = L(c) = d(y, z).$$

Andererseits gilt natürlich stets $\tilde{d}(\tilde{y}, \tilde{z}) \geq d(\pi(\tilde{y}), \pi(\tilde{z}))$ für alle $\tilde{y}, \tilde{z} \in \tilde{X}$. Damit folgt $\tilde{d}(\varphi(y), \varphi(z)) = d(y, z)$. Ferner ist $\varphi|_{B(x, \varepsilon)} : B(x, \varepsilon) \rightarrow B(\tilde{x}, \varepsilon)$ surjektiv,

da $\varphi \circ \pi|_{B(\tilde{x}, \varepsilon)}$ die Identität auf $B(\tilde{x}, \varepsilon)$ und π Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante 1 ist.

Da π also eine lokale Isometrie ist, erhalten wir $L(\tilde{c}) = L(\pi \circ \tilde{c})$ für alle Wege \tilde{c} in \tilde{X} . Aus der Definition von \tilde{d} folgt, dass auch (\tilde{X}, \tilde{d}) ein Längenraum ist.

Dass die von \tilde{d} induzierte Topologie mit der gegebenen übereinstimmt, folgt daraus, dass π eine lokale Isometrie ist. (π ist also stetig und offen bzgl. d .) Nun zeigen wir, dass (\tilde{X}, \tilde{d}) vollständig ist: Sei $(\tilde{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in \tilde{X} . Dann ist auch $(\pi(\tilde{x}_k))_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in (X, d) , da π Abstände nicht vergrößert. Es gilt insbesondere für alle $k, l \in \mathbb{N}$:

$$d(\pi(\tilde{x}_k), \pi(\tilde{x}_l)) = \inf_c L(c) \leq \inf_{\pi \circ \tilde{c}} L(\pi \circ \tilde{c}) = \tilde{d}(\tilde{x}_k, \tilde{x}_l).$$

Die Kompaktheit von (X, d) impliziert die Vollständigkeit. Also existiert der Grenzwert $x^* := \lim_{k \rightarrow \infty} \pi(\tilde{x}_k)$. Sei U eine gleichmäßig überlagerte Umgebung von x^* und seien V_j , $j \in J$, die paarweise disjunkten Blätter über U . Wie bereits gezeigt, können wir dann ein $\varepsilon > 0$ finden, so dass $B(x^*, \varepsilon) \subset U$ gilt und $\pi|_{B(\tilde{x}^*, \varepsilon)}: B(\tilde{x}^*, \varepsilon) \rightarrow B(x^*, \varepsilon)$, für alle $\tilde{x}^* \in \pi^{-1}(x^*)$ eine Isometrie ist. Also sind die verschiedenen Urbildpunkte von x^* mindestens um ε voneinander separiert. Da $(\tilde{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist, finden wir ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $\tilde{d}(\tilde{x}_k, \tilde{x}_l) < \varepsilon$ für alle $k, l \geq k_0$. Da fast alle Folgenglieder von $(\pi(\tilde{x}_k))_{k \in \mathbb{N}}$ in U liegen, gibt es folglich ein $j \in J$, so dass fast alle Folgenglieder von $(\tilde{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in V_j liegen. Ist \tilde{x}_j^* derjenige Urbildpunkt von x^* , der in V_j liegt, so gilt offensichtlich $\tilde{x}_k \rightarrow \tilde{x}_j^*$, womit gezeigt ist, dass (\tilde{X}, \tilde{d}) vollständig ist.

Nun können wir Satz A.4.8 anwenden: (\tilde{X}, \tilde{d}) ist – wie gezeigt – ein lokal kompakter⁴ vollständiger Längenraum, also ein geodätischer Raum.

Es bleibt zu zeigen, dass die Decktransformationen von π Isometrien sind. Klar ist, dass jedes $\gamma \in D(\pi)$ eine lokale Isometrie ist, denn ist U eine offene Menge, so dass $\pi|_U$ und $\pi|_{\gamma(U)}$ Isometrien sind, so folgt $\gamma|_U = (\pi|_{\gamma(U)})^{-1} \circ \pi|_U$. Sind nun $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{X}$ beliebig, so existiert ein kürzester Weg $c: I \rightarrow \tilde{X}$ von \tilde{x} nach \tilde{y} . Wir können eine Partition $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ wählen, so dass $\gamma|_{c([t_{i-1}, t_i])}$ für alle $i = 1, \dots, n$ eine Isometrie ist. Es folgt

$$\begin{aligned} \tilde{d}(\gamma(\tilde{x}), \gamma(\tilde{y})) &\leq \sum_{i=1}^n \tilde{d}(\gamma(c(t_i)), \gamma(c(t_{i-1}))) \\ &= \sum_{i=1}^n \tilde{d}(c(t_i), c(t_{i-1})) = \tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}). \end{aligned}$$

Analog zeigt man, dass

$$\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{d}(\gamma^{-1}(\gamma(\tilde{x})), \gamma^{-1}(\gamma(\tilde{y}))) \leq \tilde{d}(\gamma(\tilde{x}), \gamma(\tilde{y})).$$

Also gilt $\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{d}(\gamma(\tilde{x}), \gamma(\tilde{y}))$. □

3.2.2 Satz (Fundamental- und Decktransformationsgruppe):

Es sei X ein hinreichend zusammenhängender kompakter Hausdorffraum und

⁴Die lokale Kompaktheit von \tilde{X} ergibt sich daraus, dass X kompakt und π ein lokaler Homöomorphismus ist.

$\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ die universelle Überlagerung von X . Ferner sei $f : (X, x_0) \rightarrow (X, x_1)$ eine Überlagerung, $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1 \in \tilde{X}$ seien Punkte über x_0 bzw. x_1 , und $\tilde{f} \in \mathcal{H}(\tilde{X})$ sei die eindeutig bestimmte Liftung von f mit $\tilde{f}(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1$. Dann lässt sich \tilde{f}^* mit $f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1)$ identifizieren, d. h. das folgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(X, x_1) \\ \Pi_{x_0} \downarrow & & \downarrow \Pi_{x_1} \\ D(\pi) & \xrightarrow{\tilde{f}^*} & D(\pi) \end{array}$$

Hierbei sind die Isomorphismen Π_{x_0} und Π_{x_1} wie in Satz A.2.36 definiert.

Beweis:

Sei $u = [\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$ beliebig gewählt. Dann bildet Π_{x_0} nach Definition u auf diejenige Decktransformation γ_u ab, die \tilde{x}_0 auf den Endpunkt der Liftung von α zum Anfangspunkt \tilde{x}_0 abbildet. Ferner gilt

$$\tilde{f} \circ \gamma_u = \tilde{f}^*(\gamma_u) \circ \tilde{f}.$$

Daraus folgt

$$\tilde{f}^*(\gamma_{[\alpha]})(\tilde{x}_1) = \tilde{f}^*(\gamma_{[\alpha]})(\tilde{f}(\tilde{x}_0)) = \tilde{f}(\gamma_{[\alpha]}(\tilde{x}_0)).$$

Andererseits gilt

$$\Pi_{x_1} \circ f_*([\alpha]) = \Pi_{x_1}([f \circ \alpha]).$$

Π_{x_1} bildet nach Definition $v := [f \circ \alpha] = f_*(u)$ auf diejenige Decktransformation γ_v ab, die \tilde{x}_1 auf den Endpunkt der Liftung von $f \circ \alpha$ zum Anfangspunkt \tilde{x}_1 abbildet. Nach Konstruktion der Liftung \tilde{f} ist dieser Endpunkt aber gerade $\tilde{f}(\gamma_{[\alpha]}(\tilde{x}_0))$. Damit ist gezeigt, dass die Decktransformationen $\tilde{f}^* \circ \Pi_{x_0}([\alpha])$ und $\Pi_{x_1} \circ f_*([\alpha])$ im Punkt \tilde{x}_1 übereinstimmen und folglich identisch sind. \square

Nicht jeder topologische Raum X besitzt eine nichttriviale (d. h. eine mindestens zweiblättrige) Selbstüberlagerung $f : X \rightarrow X$. Die Existenz einer solcher Überlagerung ist sogar eine topologisch sehr einschränkende Eigenschaft. Wir wollen im Folgenden zwei Beispiele für solche Räume geben.

3.2.3 Beispiele:

- (1) Wir betrachten den n -dimensionalen Torus $T^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$. Dieser wird von \mathbb{R}^n universell überlagert durch $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$, $\pi(x) = x + \mathbb{Z}^n$. Die Decktransformationengruppe von π besteht aus den ganzzahligen Translationen von \mathbb{R}^n . Jede Matrix $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit Einträgen aus \mathbb{Z} vertauscht mit den Decktransformationen, da $M(x + n) = Mx + Mn$ und mit $n \in \mathbb{Z}^n$ auch $Mn \in \mathbb{Z}^n$ gilt. Ist $\det M \neq 0$, so ist M ein Homöomorphismus von \mathbb{R}^n und lässt sich folglich zu einer Überlagerung $E_M : \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ projizieren. Identifizieren wir $\mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ mit $S^1 \times \cdots \times S^1$ durch $(x_1, \dots, x_n) + \mathbb{Z}^n \mapsto$

$(e^{2\pi i x_1}, \dots, e^{2\pi i x_n})$, so ist E_M offensichtlich gegeben durch

$$E_M : (z_1, \dots, z_n) \mapsto \left(\prod_{j=1}^n z_j^{m_{1j}}, \dots, \prod_{j=1}^n z_j^{m_{nj}} \right). \quad (3.2)$$

Diese Abbildungen nennt man *lineare Torusendomorphismen*. Es lässt sich zeigen, dass die Blätterzahl von E_M durch $|\det M|$ gegeben ist.

- (2) Ein weiteres Beispiel für Räume, die sich selbst überlagern können, sind die Julia-Mengen hyperbolischer rationaler Funktionen auf der Riemannschen Zahlenkugel: Ist $f : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ rational mit $d = \deg(f) \geq 2$ und gilt $J(f) \cap P(f) = \emptyset$, wobei $J(f)$ die sog. *Julia-Menge* und $P(f)$ die sog. *post-kritische Menge* von f bezeichnet, so ist $f|_{J(f)} : J(f) \rightarrow J(f)$ eine d -blättrige Überlagerung.⁵ \diamond

3.3 Metrisierbarkeit von Liftungsräumen

In diesem Abschnitt wollen wir die Metrisierbarkeit der Liftungsräume $\mathcal{C}_L(\tilde{X}, \varphi)$ und $\mathcal{H}_L(\tilde{X}, \varphi)$ durch die von einer geeigneten Metrik \tilde{d} auf \tilde{X} induzierten Supremumsmetrik beweisen. Dazu müssen wir vorauszusetzen, dass (\tilde{X}, \tilde{d}) vollständig ist und die Decktransformationen von π bzgl. \tilde{d} Isometrien sind.

3.3.1 Satz und Definition (Metrisierbarkeit von $\mathcal{H}_L(\tilde{X}, \varphi)$):

Es sei $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ eine normale Projektion. Ferner sei \tilde{X} vollständig metrisierbar durch eine Metrik \tilde{d} , die alle Decktransformationen von π zu Isometrien macht. Für jeden Automorphismus $\varphi \in \text{Aut}(\Gamma)$ definieren wir $\tilde{\Delta} : \mathcal{C}_L(\tilde{X}, \varphi)^2 \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ und $\tilde{\Delta}^\pm : \mathcal{H}_L(\tilde{X}, \varphi)^2 \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ durch:

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2) &:= \sup_{\tilde{x} \in \tilde{X}} \tilde{d}(\tilde{h}_1(\tilde{x}), \tilde{h}_2(\tilde{x})), \\ \tilde{\Delta}^\pm(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2) &:= \tilde{\Delta}(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2) + \tilde{\Delta}(\tilde{h}_1^{-1}, \tilde{h}_2^{-1}). \end{aligned}$$

Dann gilt:

- (a) $(\mathcal{C}_L(\tilde{X}, \varphi), \tilde{\Delta})$ ist ein vollständiger metrischer Raum.
- (b) $(\mathcal{H}_L(\tilde{X}, \varphi), \tilde{\Delta}^\pm)$ ist ein vollständiger metrischer Raum.
- (c) Die Metriken $\tilde{\Delta}$ und $\tilde{\Delta}^\pm$ induzieren die kompakt-offene Topologie.

Beweis:

- (a) Um nachzuweisen, dass $\tilde{\Delta}$ eine Metrik ist, reicht es offensichtlich $\tilde{\Delta}(\tilde{f}_1, \tilde{f}_2) < \infty$ für alle $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 \in \mathcal{C}_L(\tilde{X}, \varphi)$ zu zeigen. Da die Decktransformationen von π Isometrien sind, gilt für jedes $\gamma \in \Gamma$ und $\tilde{x} \in \tilde{X}$:

$$\begin{aligned} \tilde{d}(\tilde{f}_1(\tilde{x}), \tilde{f}_2(\tilde{x})) &= \tilde{d}(\tilde{f}_1 \circ \gamma^{-1} \circ \gamma(\tilde{x}), \tilde{f}_2 \circ \gamma^{-1} \circ \gamma(\tilde{x})) \\ &= \tilde{d}(\varphi(\gamma^{-1}) \circ \tilde{f}_1 \circ \gamma(\tilde{x}), \varphi(\gamma^{-1}) \circ \tilde{f}_2 \circ \gamma(\tilde{x})) \\ &= \tilde{d}(\tilde{f}_1 \circ \gamma(\tilde{x}), \tilde{f}_2 \circ \gamma(\tilde{x})). \end{aligned}$$

⁵ $J(f)$ ist der Abschluss der Menge aller repulsiven periodischen Punkte von f . $P(f)$ ist der Abschluss der Vereinigung aller Vorwärtsorbits kritischer Werte von f .

Nach Satz 3.1.6 (d) existiert ein kompakter Fundamentalbereich von π , also eine kompakte Menge \tilde{K} mit $\pi(\tilde{K}) = X$. Folglich finden wir zu jedem $\tilde{x} \in \tilde{X}$ ein $\gamma \in \Gamma$ mit $\gamma(\tilde{x}) \in \tilde{K}$. Mit oben folgt

$$\tilde{\Delta}(\tilde{f}_1, \tilde{f}_2) = \sup_{\tilde{x} \in \tilde{X}} \tilde{d}(\tilde{f}_1(\tilde{x}), \tilde{f}_2(\tilde{x})) = \sup_{\tilde{x} \in \tilde{K}} \tilde{d}(\tilde{f}_1(\tilde{x}), \tilde{f}_2(\tilde{x})) < \infty. \quad (3.3)$$

Sei $(\tilde{f}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $(\mathcal{C}_L(\tilde{X}, \varphi), \tilde{\Delta})$. Dann konvergiert \tilde{f}_n aufgrund der Vollständigkeit von (\tilde{X}, \tilde{d}) gleichmäßig gegen eine stetige Grenzfunktion $\tilde{f} \in \mathcal{C}(\tilde{X})$. Für alle $\gamma \in \Gamma$ und $\tilde{x} \in \tilde{X}$ gilt

$$\begin{aligned} \tilde{d}(\tilde{f} \circ \gamma(\tilde{x}), \varphi(\gamma) \circ \tilde{f}(\tilde{x})) &\leq \tilde{d}(\tilde{f} \circ \gamma(\tilde{x}), \tilde{f}_n \circ \gamma(\tilde{x})) \\ &\quad + \tilde{d}(\varphi(\gamma) \circ \tilde{f}_n(\tilde{x}), \varphi(\gamma) \circ \tilde{f}(\tilde{x})) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Damit ist klar, dass $\tilde{f} \circ \gamma = \varphi(\gamma) \circ \tilde{f}$ gilt, also $\tilde{f} \in \mathcal{C}_L(\tilde{X}, \varphi)$.

- (b) Da $\mathcal{H}_L(\tilde{X}, \varphi)^{-1} = \mathcal{H}_L(\tilde{X}, \varphi^{-1})$ gilt, ist nach dem bereits Gezeigten klar, dass $\tilde{\Delta}^\pm$ eine Metrik ist. Sei $(\tilde{h}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $(\mathcal{H}_L(\tilde{X}, \varphi), \tilde{\Delta}^\pm)$. Dann konvergiert sowohl $(\tilde{h}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ als auch $(\tilde{h}_n^{-1})_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen eine stetige Grenzfunktion \tilde{h} bzw. \tilde{k} . Die Gleichung $\tilde{h}_n \circ \tilde{h}_n^{-1} = \tilde{h}_n^{-1} \circ \tilde{h}_n = \text{id}$ überträgt sich auf die Grenzfunktionen, denn z. B. gilt für festes $\tilde{x} \in \tilde{X}$:

$$\tilde{d}(\tilde{h}(\tilde{k}(\tilde{x})), \tilde{x}) \leq \tilde{d}(\tilde{h}(\tilde{k}(\tilde{x})), \tilde{h}(\tilde{h}_n^{-1}(\tilde{x}))) + \tilde{d}(\tilde{h}(\tilde{h}_n^{-1}(\tilde{x})), \tilde{h}_n(\tilde{h}_n^{-1}(\tilde{x}))).$$

Wegen $\tilde{h}_n^{-1}(\tilde{x}) \rightarrow \tilde{k}(\tilde{x})$ wird der erste Summand für hinreichend großes n beliebig klein, und wegen der gleichmäßigen Konvergenz $\tilde{h}_n \rightarrow \tilde{h}$ auch der zweite. Also gilt $\tilde{h}(\tilde{k}(\tilde{x})) = \tilde{x}$. Folglich handelt es sich bei \tilde{h} und \tilde{k} um Homöomorphismen. Mit (a) gilt deshalb $\tilde{h} \in \mathcal{H}_L(\tilde{X}, \varphi)$.

- (c) Dass $\mathcal{T}_{CO} \subset \mathcal{T}_{\tilde{\Delta}}$ gilt, zeigt man mit genau denselben Argumenten wie im Beweis von Satz 2.1.6. Ist umgekehrt $A \subset \mathcal{C}_L(\tilde{X}, \varphi)$ offen bzgl. $\tilde{\Delta}$ und $\tilde{f} \in A$, so müssen wir zeigen, dass A eine Umgebung von \tilde{f} in der kompakt-offenen Topologie ist. Sei dazu $\tilde{K} \subset \tilde{X}$ ein kompakter Fundamentalbereich von π . Mit denselben Argumenten wie im Beweis von Satz 2.1.6 finden wir ein $\varepsilon > 0$ mit $B(\tilde{f}, \varepsilon) \subset A$ und endlich viele Subbasiselemente $[\tilde{K}_i, \tilde{U}_i]$, $i \in I$, so dass für jedes $\tilde{g} \in \bigcap_{i \in I} [\tilde{K}_i, \tilde{U}_i]$ gilt:

$$\sup_{\tilde{x} \in \tilde{K}} \tilde{d}(\tilde{g}(\tilde{x}), \tilde{f}(\tilde{x})) < \varepsilon.$$

Nun folgt aber aus (3.3)

$$\tilde{\Delta}(\tilde{g}, \tilde{f}) = \sup_{\tilde{x} \in \tilde{K}} \tilde{d}(\tilde{g}(\tilde{x}), \tilde{f}(\tilde{x})),$$

also $\tilde{\Delta}(\tilde{g}, \tilde{f}) < \varepsilon$. Damit ergibt sich $\bigcap_{i \in I} [\tilde{K}_i, \tilde{U}_i] \subset B(\tilde{f}, \varepsilon) \subset A$. Also ist A offen in der kompakt-offenen Topologie. Dass die von $\tilde{\Delta}^\pm$ induzierte Topologie mit der von $\tilde{\Delta}$ induzierten übereinstimmt, ist klar, da die Inversion $\tilde{h} \mapsto \tilde{h}^{-1}$, $\mathcal{H}(\tilde{X}) \rightarrow \mathcal{H}(\tilde{X})$, nach Satz 2.2.2 stetig bzgl. der kompakt-offenen Topologie ist. \square

3.3.2 Korollar:

Sei (X, d) ein semilokal einfach zusammenhängender kompakter Längenraum mit universeller Überlagerung $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ und $\varphi \in \text{Aut}(\text{D}(\pi))$. Dann gelten alle Aussagen von Satz 3.3.1 bzgl. der nach \tilde{X} gelifteten Metrik \tilde{d} .

Beweis:

Nach Satz 3.1.7 ist π eine normale Projektion. Nach Satz 3.2.1 ist \tilde{X} mit der gelifteten Metrik \tilde{d} vollständig und alle Decktransformationen sind Isometrien.

□

3.4 Expandierende Abbildungen

In diesem Abschnitt wollen wir detailliert die Dynamik expandierender Abbildungen auf kompakten metrischen Räumen studieren. Dabei ist mit „expandierend“ gemeint, dass die Abbildung Abstände um einen konstanten Faktor $\lambda > 1$ vergrößert. Es ist unmittelbar einsichtig, dass dies keine globale Eigenschaft sein kann, da es in einem kompakten Raum stets Punkte mit maximalem Abstand zueinander gibt. Wir fordern deshalb nur, dass die Expansionsbedingung lokal gelten soll. Ferner untersuchen wir Abbildungen, die die scheinbar schwächere Eigenschaft haben, „expansiv“ zu sein. Dies bedeutet, dass je zwei verschiedene Punkte des Raums sich unter Iteration der Abbildung nach endlicher Zeit um einen gewissen universellen Mindestabstand voneinander entfernt haben müssen. Die Resultate dieses Abschnitts sind im Wesentlichen aus dem dritten Kapitel in [Urb 02] entnommen.

3.4.1 Definition (Expandierende/expansive Abbildungen):

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $f : X \rightarrow X$ stetig. Dann heißt f **expandierend** (bzgl. der Metrik d), falls es Konstanten $\varepsilon_0 > 0$ und $\lambda > 1$ gibt, so dass für alle $x, y \in X$ gilt:

$$d(x, y) < \varepsilon_0 \Rightarrow d(f(x), f(y)) \geq \lambda d(x, y). \quad (3.4)$$

λ heißt **Expansionsfaktor** von f . Gilt (3.4) auf einer Teilmenge $A \subset X$, so sagen wir, f ist **expandierend auf A**.

f heißt **expansiv** (bzgl. der Metrik d), falls es ein $\delta > 0$ gibt, so dass aus $d(f^n(x), f^n(y)) < \delta$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ stets $x = y$ folgt. δ heißt **Expansionskonstante** von f .

3.4.2 Lemma (über expandierende/expansive Abbildungen):

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $f : X \rightarrow X$ stetig. Dann gilt:

- Ist f^n expandierend für ein $n \in \mathbb{N}$, so existiert eine zu d topologisch äquivalente Metrik d' , so dass f bzgl. d' expandierend ist.
- Ist f expandierend (mit Konstanten $\varepsilon_0 > 0$ und $\lambda > 1$), so ist f expansiv mit Expansionskonstante ε_0 .
- Ist f expansiv und gilt $h \circ f = f \circ h$ für eine Abbildung $h \in X^X$ mit $d(h(x), x) < \delta$ für alle $x \in X$, so folgt $h = \text{id}_X$.

- (d) Ist X kompakt und f expansiv, so ist auch jede zu f topologisch konjugierte Abbildung $g : X \rightarrow X$ expansiv.

Beweis:

- (a) Seien $\varepsilon_0 > 0$ und $\lambda > 1$ die Konstanten, so dass

$$d(x_1, x_2) < \varepsilon_0 \Rightarrow d(f^n(x_1), f^n(x_2)) \geq \lambda d(x_1, x_2).$$

Sei $\mu := \lambda^{1/n}$ und

$$d'(x_1, x_2) := \sum_{i=0}^{n-1} \mu^{-i} d(f^i(x_1), f^i(x_2)), \quad d' : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_0^+.$$

Dann folgt aus $d(x_1, x_2) \leq d'(x_1, x_2) < \varepsilon_0$:

$$\begin{aligned} d'(f(x_1), f(x_2)) &= \mu d'(x_1, x_2) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda^{\frac{1-i}{n}} d(f^i(x_1), f^i(x_2)) - \sum_{i=0}^{n-1} \lambda^{\frac{1-i}{n}} d(f^i(x_1), f^i(x_2)) \\ &= \lambda^{\frac{1-n}{n}} d(f^n(x_1), f^n(x_2)) - \lambda^{\frac{1}{n}} d(x_1, x_2) \\ &= \lambda^{\frac{1-n}{n}} (d(f^n(x_1), f^n(x_2)) - \lambda d(x_1, x_2)) \geq 0. \end{aligned}$$

Also ist f bzgl. d' expandierend mit Expansionsfaktor $\mu > 1$. Da $d \leq d'$ gilt und d' gleichmäßig stetig bzgl. d ist, erzeugen die beiden Metriken dieselbe Topologie.

- (b) Sei f expandierend mit Konstanten $\varepsilon_0 > 0$ und $\lambda > 1$. Gilt nun $d(f^n(x), f^n(y)) < \varepsilon_0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, so folgt $d(f^{n+1}(x), f^{n+1}(y)) \geq \lambda d(f^n(x), f^n(y))$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Mit vollständiger Induktion ergibt sich

$$d(f^n(x), f^n(y)) \geq \lambda^n d(x, y) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Mit $\lambda^n \rightarrow \infty$ und $d(f^n(x), f^n(y)) < \varepsilon_0$ folgt damit $d(x, y) = 0$, also $x = y$.

- (c) Unter den gegebenen Voraussetzungen gilt

$$d(f^n(h(x)), f^n(x)) = d(h(f^n(x)), f^n(x)) < \delta \quad \text{für alle } x \in X.$$

Daraus folgt unmittelbar $h(x) \equiv x$.

- (d) Es gelte $h \circ g = f \circ h$ für einen Homöomorphismus $h \in \mathcal{H}(X)$. $\delta(f) > 0$ sei die Expansionskonstante von f . Aufgrund der Kompaktheit von X ist h gleichmäßig stetig. Also existiert ein $\delta(g) > 0$, so dass aus $d(x_1, x_2) < \delta(g)$ stets $d(h(x_1), h(x_2)) < \delta(f)$ folgt. Seien nun $x_1, x_2 \in X$ so gewählt, dass $d(g^n(x), g^n(y)) < \delta(g)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt. Dann folgt für alle $n \in \mathbb{N}_0$:

$$d(h(g^n(x_1)), h(g^n(x_2))) = d(f^n(h(x_1)), f^n(h(x_2))) < \delta(f).$$

Damit erhält man $h(x_1) = h(x_2)$, also $x_1 = x_2$. \square

3.4.3 Bemerkungen:

- Ist (X, d) kompakt, so gilt auch die Umkehrung von (b): Jede expansive Abbildung $f : X \rightarrow X$ ist expandierend; i. A. allerdings nicht bzgl. der gegebenen Metrik d , sondern bzgl. einer geeignet definierten topologisch äquivalenten Metrik \tilde{d} . Aus topologischer Sicht sind also expandierende und expansive Abbildungen das Gleiche. Der Beweis dieser Aussage ist jedoch bei weitem komplizierter und soll hier nicht ausgeführt werden (siehe [Dnk 05, Satz 46, S. 101]).
- Wegen (b) bezeichnen wir ab jetzt auch die Konstante ε_0 einer expandierenden Abbildung als Expansionskonstante.

Der folgende Satz, den man auch in [Kat 95, Prop. 2.4.2, S. 72] findet, liefert eine hinreichende Bedingung für die Expansivität einer C^1 -Abbildung auf einer kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit.

3.4.4 Satz (Expansionskriterium für C^1 -Abbildungen):

Sei M eine zusammenhängende kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Riemannschem Abstand $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}_0^+$. $f : M \rightarrow M$ sei eine C^1 -Abbildung und $\lambda > 1$ eine Konstante, so dass gilt:

$$\|Df_p v\| \geq \lambda \|v\| \quad \text{für alle } p \in M, v \in T_p M. \quad (3.5)$$

Dann ist f offen und expandierend bzgl. d mit Expansionsfaktor λ .

Beweis:

Wir müssen nachweisen, dass es ein $\varepsilon_0 > 0$ gibt, so dass $d(f(p), f(q)) \geq \lambda d(p, q)$ für alle $p, q \in M$ mit $d(p, q) < \varepsilon_0$ gilt. Offensichtlich folgt aus (3.5), dass Df_p für alle $p \in M$ ein Isomorphismus ist. Der Umkehrsatz garantiert uns, dass zu jedem $p \in M$ eine offene Umgebung U_p von p existiert, so dass $f|_{U_p}$ ein Diffeomorphismus auf die offene Menge $f(U_p)$ ist. Daraus folgt, dass f eine offene Abbildung ist. Folglich ist $f(M)$ offen und abgeschlossen in M und damit gilt $f(M) = M$. Ferner ist die Menge $\{U_p\}_{p \in M}$ eine offene Überdeckung von M . Da M kompakt ist, existiert eine Lebesgue-Zahl $\delta_0 > 0$ dieser Überdeckung. Dann ist f auf jedem δ_0 -Ball injektiv. Also ist der Abstand zweier Urbildpunkte eines Punktes $p \in M$ mindestens δ_0 . Da M kompakt ist, kann jeder Punkt also nur endlich viele Urbildpunkte besitzen. Daher existiert zu jedem $p \in M$ eine zusammenhängende offene Umgebung V_p , so dass der Durchmesser jeder Zusammenhangskomponente von $f^{-1}(V_p)$ kleiner ist als δ_0 . Sei $\delta_1 > 0$ eine Lebesgue-Zahl der Überdeckung $\{V_p\}_{p \in M}$. Dann ist auch der Durchmesser jeder Zusammenhangskomponente des Urbilds eines δ_1 -Balls kleiner als δ_0 . Aufgrund der gleichmäßigen Stetigkeit von f auf der kompakten Mannigfaltigkeit M können wir ein $\varepsilon_0 > 0$ so wählen, dass aus $d(p, q) < \varepsilon_0$ stets $d(f(p), f(q)) < \frac{\delta_1}{2}$ folgt. Gilt nun $d(p, q) < \varepsilon_0$, so finden wir eine kürzeste Geodäte $c : I \rightarrow M$ von $f(p)$ nach $f(q)$, die ganz in einem δ_1 -Ball liegt. Dann ist $\tilde{c} : I \rightarrow M$, definiert durch $\tilde{c}(0) = p$, $\tilde{c}(1) = q$, $f(\tilde{c}(t)) = c(t)$, eine wohldefinierte, eindeutig bestimmte differenzierbare Kurve von p nach q , und es

gilt

$$\begin{aligned} d(f(p), f(q)) &= L(c) = \int_0^1 \|Df_{\tilde{c}(t)} \dot{\tilde{c}}(t)\| dt \\ &\geq \lambda \int_0^1 \|\dot{\tilde{c}}(t)\| dt = \lambda L(\tilde{c}) \geq \lambda d(p, q). \end{aligned}$$

Also ist f expandierend mit Expansionsfaktor λ . \square

3.4.5 Bemerkungen:

- Statt (3.5) könnten wir auch die Existenz von Konstanten $c > 0$ und $\mu > 1$ fordern, so dass

$$\|Df_x^n v\| \geq c\mu^n \|v\| \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}, x \in M, v \in T_x M. \quad (3.6)$$

Dann ist nämlich f^n nach Satz 3.4.4 für hinreichend großes n expandierend. Folglich ist auch f nach Lemma 3.4.2 in einer geeignet gewählten Metrik expandierend, wobei diese nach einem Theorem von J. N. Mather sogar als Riemannscher Abstand einer geeigneten Riemannschen Metrik gewählt werden kann (siehe [Mat 68]).

- Ein weiteres Beispiel für expansive Abbildungen sind die Einschränkungen hyperbolischer rationaler Abbildungen $f : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ auf ihre Julia-Menge (siehe Beispiel 3.2.3). Einen Beweis dazu findet man z. B. in [Dnk 05, Satz 45, S. 96].

3.4.6 Vereinbarung:

Ab jetzt sei (X, d) stets ein kompakter metrischer Raum, außer es wird ausdrücklich anders vermerkt.

3.4.7 Satz (Nachweis von Überlagerungsabbildungen):

Sei $f : X \rightarrow X$ eine stetige, offene und lokal injektive Abbildung. Ist dann zusätzlich X zusammenhängend oder f surjektiv, so ist f eine endlichblättrige Überlagerungsabbildung.

Beweis:

Zu jedem Punkt $x \in X$ existiert nach Voraussetzung eine offene Umgebung U_x , so dass $f|_{U_x}$ injektiv ist. Daraus folgt insbesondere, dass die Fasern $f^{-1}(y)$ für $y \in X$ diskret und aufgrund der Kompaktheit von X damit endlich sind. Ist X zusammenhängend, so ist f surjektiv, denn $f(X)$ ist aufgrund der Offenheit von f offen und aufgrund der Stetigkeit von f abgeschlossen. Aus dem Zusammenhang von X folgt daraus unmittelbar $f(X) = X$.

Es sei $x_0 \in X$ und U eine offene Umgebung von x_0 , so dass auch $f|_{\text{cl}(U)}$ noch injektiv ist. Eine solche Umgebung existiert aufgrund der (lokalen) Kompaktheit von X . Dann ist die Einschränkung $f|_U : U \rightarrow f(U)$ eine stetige Bijektion. Ferner gilt $f(U) \subset f(\text{cl}(U)) \subset \text{cl}(f(U))$. Da X ein kompakter metrischer Raum ist, ist $\text{cl}(U)$ kompakt und damit $f(\text{cl}(U))$ abgeschlossen. Daraus folgt $\text{cl}(f(U)) = f(\text{cl}(U))$. Also ist $f|_{\text{cl}(U)} : \text{cl}(U) \rightarrow \text{cl}(f(U))$ ein Homöomorphismus nach Satz A.1.22 (d). Folglich ist auch die Einschränkung $f|_U : U \rightarrow f(U)$ ein

Homöomorphismus. Da f offen ist, ist zudem $f(U)$ offen; also ist f ein lokaler Homöomorphismus.

Es sei $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_n\}$ für ein beliebiges $y \in X$. Dann existieren offene disjunkte Umgebungen \tilde{U}_i von x_i , so dass die Einschränkungen $f|_{\tilde{U}_i} : \tilde{U}_i \rightarrow f(\tilde{U}_i)$ Homöomorphismen sind. Wir setzen $V := \bigcap_{i=1}^n f(\tilde{U}_i)$ und $U_i := f^{-1}(V) \cap \tilde{U}_i$. Da f offen ist, ist auch V offen und damit ist für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ U_i eine offene Umgebung von x_i . Ferner ist die Einschränkung $f|_{U_i} : U_i \rightarrow X$ injektiv und es gilt deshalb $f(U_i) = f(\tilde{U}_i) \cap f(f^{-1}(V)) = f(\tilde{U}_i) \cap V = V$. Also ist $f|_{U_i} : U_i \rightarrow V$ für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ ein Homöomorphismus. Gilt nun $f^{-1}(V) = \bigcup_{i=1}^n U_i$, so sind wir fertig. Andernfalls existiert eine nichtleere Menge $U_{n+1} \subset X$ mit $U_{n+1} \cap \bigcup_{i=1}^n U_i = \emptyset$, die kein Urbild von y enthält und es gilt $f^{-1}(V) = U_{n+1} \cup \bigcup_{i=1}^n U_i$. Nun können wir zwei Fälle unterscheiden: Entweder y liegt auf dem Rand von $f(U_{n+1}) \subset V$ oder nicht. Gilt das Letztere, so finden wir eine kleinere offene Umgebung $W \subset V$ von y mit $f(U_{n+1}) \cap W = \emptyset$, so dass W gleichmäßig überlagert wird. Liegt y auf dem Rand von $f(U_{n+1})$, so finden wir eine Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $f(U_{n+1})$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$. Die Menge der Urbilder $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(y_n)$ ist unendlich und hat deshalb aufgrund der Kompaktheit von X einen Häufungswert x^* in X . Es existiert also eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(y_n)$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$. Die Folge $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen y . Folglich muss ein Urbild von y existieren, das auf dem Rand von U_{n+1} liegt im Widerspruch zur Disjunktheit von U_{n+1} und $\bigcup_{i=1}^n U_i$. \square

3.4.8 Bemerkungen:

- Falls der Raum X unzusammenhängend ist, ist die Blätterzahl von f zwar lokal konstant, aber nicht notwendigerweise global. Ein Gegenbeispiel ist die auf der topologischen Summe von zwei Einheitskreisen definierte Abbildung, die auf dem einen Kreis durch $z \mapsto z^2$ und auf dem anderen durch $z \mapsto z^3$ definiert ist.
- Insbesondere sind offene expandierende Abbildungen auf kompakten zusammenhängenden metrischen Räumen Überlagerungen, da diese offensichtlich lokal injektiv sind.
- Ist der Raum X ein topologische Mannigfaltigkeit, so brauchen wir die Offenheit von f nicht zu fordern, was aus dem Satz über die Invarianz des Gebiets folgt (siehe z. B. [StZ 88, Satz 1.1.16, S. 6] bzw. [StZ 88, Satz 1.5.2, S. 27]).
- Dass man i. A. nicht auf die Forderung des Zusammenhangs von X oder der Surjektivität von f verzichten kann, zeigt folgendes Gegenbeispiel: Sei $X = \{0, 1\}$ mit der diskreten Metrik versehen. Dieser Raum ist sicherlich kompakt und unzusammenhängend. Jede Abbildung $f : X \rightarrow X$ ist natürlich stetig, offen und lokal injektiv, aber nicht unbedingt surjektiv und damit i. A. keine Überlagerung.

3.4.9 Lemma: (vgl. [Urb 02, Lemma 3.1.2])

Sei $f : X \rightarrow X$ eine stetige offene Abbildung. Dann existiert zu jedem $\eta > 0$ ein $\xi > 0$, so dass $B(f(x), \xi) \subset f(B(x, \eta))$ für alle $x \in X$ gilt.

Beweis:

Für jedes $x \in X$ setzen wir $\xi(x) := \sup\{r > 0 \mid B(f(x), r) \subset f(B(x, \eta))\}$. Da f offen ist, gilt $\xi(x) > 0$. Da $B(f(x), \xi(x)) \subset f(B(x, \eta))$, reicht es zu zeigen, dass $\xi = \inf_{x \in X} \xi(x)$. Wir nehmen im Widerspruch dazu $\xi = 0$ an. Dann gibt es eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X , so dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi(x_n) = 0$. Da X kompakt ist, können wir $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = y$ für ein $y \in X$ annehmen. Daher gilt $B(y, \frac{\eta}{2}) \subset B(x_n, \eta)$ für hinreichend große n , und folglich

$$f(B(x_n, \eta)) \supset f((B(x, \frac{\eta}{2}))) \supset B(f(y), \varepsilon) \supset B(f(x_n), \frac{\varepsilon}{2})$$

für ein $\varepsilon > 0$ und alle hinreichend großen n . Daher gilt $\xi(x_n) \geq \frac{\varepsilon}{2}$ für diese n im Widerspruch zu $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi(x_n) = 0$. \square

3.4.10 Notation:

Ist $f : X \rightarrow X$ eine offene expandierende Abbildung, so ist für jedes $x \in X$ die Einschränkung $f|_{B(x, \frac{\varepsilon_0}{2})} : B(x, \frac{\varepsilon_0}{2}) \rightarrow f(B(x, \frac{\varepsilon_0}{2}))$ ein Homöomorphismus. Wir wählen gemäß Lemma 3.4.9 ein $\xi > 0$, so dass $B(f(x), \xi) \subset f(B(x, \frac{\varepsilon_0}{2}))$ für alle $x \in X$ gilt. Die Einschränkung der Umkehrabbildung von $f|_{B(x, \frac{\varepsilon_0}{2})}$ auf $B(f(x), \xi)$ bezeichnen wir mit f_x^{-1} . Dann gilt für alle $y \in X$

$$f^{-1}(B(y, \xi)) = \bigcup_{x \in f^{-1}(y)} f_x^{-1}(B(y, \xi)).$$

Der Beweis für folgendes Lemma erübrigt sich nach dem bereits Gezeigten.

3.4.11 Lemma: (vgl. [Urb 02, Lemma 3.1.4])

Sei $f : X \rightarrow X$ eine offene expandierende Abbildung. Dann gilt für alle $x \in X$ und $y, z \in B(f(x), \xi)$:

$$d(f_x^{-1}(y), f_x^{-1}(z)) \leq \lambda^{-1} d(y, z).$$

Insbesondere gilt $f_x^{-1}(B(f(x), \xi)) \subset B(x, \lambda^{-1}\xi) \subset B(x, \xi)$.

3.4.12 Definition:

Für jedes $x \in X$, $n \geq 1$ und $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ sei $x_j = f^j(x)$. Nach Lemma 3.4.11 ist die Komposition $f_{x_0}^{-1} \circ f_{x_1}^{-1} \circ \dots \circ f_{x_{n-1}}^{-1} : B(f^n(x), \xi) \rightarrow X$ wohldefiniert. Wir bezeichnen sie mit f_x^{-n} .

Folgende Eigenschaften von f_x^{-n} sind offensichtlich:

$$f^{-n}(B(y, \xi)) = \bigcup_{x \in f^{-n}(y)} f_x^{-n}(B(y, \xi)). \quad (3.7)$$

$$d(f_x^{-n}(y), f_x^{-n}(z)) \leq \lambda^{-n} d(y, z) \text{ für alle } y, z \in B(f^n(x), \xi). \quad (3.8)$$

$$f_x^{-n}(B(f^n(x), r)) \subset B(x, \min\{\frac{\varepsilon_0}{2}, \lambda^{-n}r\}) \text{ für alle } r \leq \xi. \quad (3.9)$$

3.4.13 Definition (Pseudo-Orbits, Beschattung):

Sei $f : X \rightarrow X$ stetig und $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Zu gegebenem $\alpha \geq 0$ nennen wir eine (eventuell endliche) Folge $(x_i)_{i=0}^n$ einen **α -Pseudo-Orbit** für f , falls

$$d(f(x_i), x_{i+1}) \leq \alpha \quad \text{für } i = 0, \dots, n-1.$$

Für $n < \infty$ heißt die Folge $(x_i)_{i=0}^n$ **periodischer α -Pseudo-Orbit**, falls

$$d(f(x_i), x_{(i+1) \bmod n}) \leq \alpha \quad \text{für } i = 0, \dots, n.$$

Sei $\beta > 0$ und $x \in X$. Dann sagen wir, der Vorwärtsorbit $O_f^+(x)$ **β -beschattet** den Pseudo-Orbit $(x_i)_{i=0}^n$, falls

$$d(f^i(x), x_i) \leq \beta \quad \text{für } i = 0, \dots, n.$$

3.4.14 Definition (Beschattungseigenschaft):

Eine stetige Abbildung $f : X \rightarrow X$ hat die **Beschattungseigenschaft**, falls zu jedem $\beta > 0$ ein $\alpha > 0$ existiert, so dass jeder endliche α -Pseudo-Orbit von einem (echten) Vorwärtsorbit β -beschattet wird.

f hat die **periodische Beschattungseigenschaft**, falls zu jedem $\beta > 0$ ein $\alpha > 0$ existiert, so dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ und zu jedem periodischen α -Pseudo-Orbit x_0, \dots, x_{n-1} ein n -periodischer Orbit $O_f^+(x)$ existiert, der den Pseudo-Orbit $(x_i)_{i=0}^{n-1}$ β -beschattet.

3.4.15 Lemma: (vgl. [Urb 02, Prop. 3.2.1])

Sei $f : X \rightarrow X$ expansiv mit Expansionskonstante $\delta > 2\beta > 0$. Dann gibt es höchstens einen Punkt $x \in X$, dessen Vorwärtsorbit den Pseudo-Orbit $(x_i)_{i=0}^\infty$ β -beschattet.

Beweis:

Nehmen wir an, dass die Vorwärtsorbits von x und y den Pseudo-Orbit $(x_i)_{i=0}^\infty$ β -beschatten, so folgt nach der Dreiecksungleichung für alle $i \in \mathbb{N}_0$:

$$d(f^i(x), f^i(y)) \leq d(f^i(x), x_i) + d(x_i, f^i(y)) \leq 2\beta < \delta.$$

Daraus erhält man nach Definition der Expansivität unmittelbar $x = y$. \square

3.4.16 Lemma: (vgl. [Urb 02, Lemma 3.2.2])

Sei $f : X \rightarrow X$ eine offene expandierende Abbildung, sei $0 < \beta < \xi$ und $0 < \alpha \leq \min\{(\lambda - 1)\beta, \xi\}$. Falls $(x_i)_{i=0}^n$ ($n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$) ein α -Pseudo-Orbit ist, dann gilt mit $x'_i := f_{x_i}^{-1}(x_{i+1})$:

(a) Für alle $i = 0, 1, \dots, n-1$:

$$f_{x'_i}^{-1}(\text{cl}(B(x_{i+1}, \beta))) \subset \text{cl}(B(x_i, \beta)).$$

Folglich sind für $i = 0, 1, \dots, n$ die Kompositionen

$$f_i = f_{x'_0}^{-1} \circ f_{x'_1}^{-1} \circ \dots \circ f_{x'_{i-1}}^{-1} : \text{cl}(B(x_i, \beta)) \rightarrow X$$

wohldefiniert.

- (b) Die Folge der kompakten Mengen $f_i(\text{cl}(B(x_i, \beta)))$, $i = 0, \dots, n$, ist monoton fallend (im Sinne der Mengeninklusion).
(c) Der Durchschnitt

$$\bigcap_{i=0}^n f_i(\text{cl}(B(x_i, \beta)))$$

ist nichtleer und die Vorrätsorbits (für $i = 0, 1, \dots, n$) aller Punkte in dieser Menge β -beschatten den Pseudo-Orbit $(x_i)_{i=0}^n$.

Beweis:

Aus (3.9) und (3.8) folgt

$$f_{x'_i}^{-1}(\text{cl}(B(f(x_{i+1}), \beta))) \subset \text{cl}(B(x'_i, \lambda^{-1}\beta)) \subset \text{cl}(B(x_i, \lambda^{-1}\beta + \lambda^{-1}\alpha)).$$

Ferner gilt nach Voraussetzung $\lambda^{-1}\alpha + \lambda^{-1}\beta \leq \beta$. (b) folgt unmittelbar aus (a). Der erste Teil von (c) folgt aus (b) und der Kompaktheit von X (siehe Satz A.1.21 (c)). Um den zweiten Teil zu beweisen, bezeichnen wir den Durchschnitt in (c) mit A . Nach Definition von A gilt $f_i(A) \subset \text{cl}(B(x_i, \beta))$ für $i = 0, 1, \dots, n$. Folglich wird $(x_i)_{i=0}^n$ von dem Vorrätsorbit jedes Punktes aus A β -beschattet.

□

Als unmittelbare Folgerung aus Lemma 3.4.16 ergibt sich:

3.4.17 Korollar (Beschattungslemma): (vgl. [Urb 02, Cor. 3.2.3])
Jede offene expandierende Abbildung hat die Beschattungseigenschaft.

3.4.18 Korollar (Closing-Lemma): (vgl. [Urb 02, Cor. 3.2.4])

Jede expansive Abbildung $f : X \rightarrow X$ mit der Beschattungseigenschaft (und damit jede offene expandierende Abbildung) hat die periodische Beschattungseigenschaft. Insbesondere existiert zu jedem $\beta > 0$ ein $\alpha > 0$, so dass aus $d(x, f^l(x)) \leq \alpha$ für beliebiges $l \geq 1$ die Existenz eines l -periodischen Orbits folgt, der den Pseudo-Orbit $(x, f(x), \dots, f^{l-1}(x))$ β -beschattet.

Beweis:

Sei δ die Expansionskonstante von f . Zu gegebenem $\beta \in (0, \frac{\delta}{2})$ sei $\alpha > 0$ gemäß der Definition der Beschattungseigenschaft gewählt. Sei nun $(x_i)_{i=0}^{n-1}$ ein periodischer α -Pseudo-Orbit, d. h.:

$$d(f(x_i), x_{i+1}) \leq \alpha \quad \text{für } i = 0, \dots, n-2 \quad \text{und} \quad d(f(x_{n-1}), x_0) \leq \alpha.$$

Dann ist die durch $y_i := x_{i \bmod n}$ definierte unendliche Folge ein α -Pseudo-Orbit. Da f die Beschattungseigenschaft hat, existiert ein echter Vorrätsorbit $O_f^+(x)$, der $(y_i)_{i=0}^\infty$ β -beschattet. Es gilt also $d(f^i(x), y_i) \leq \beta < \frac{\delta}{2}$, und folglich

$$d(f^{i+n}(x), y_{i+n}) = d(f^{i+n}(x), y_i) \leq \beta < \frac{\delta}{2}.$$

Mit der Dreiecksungleichung folgt

$$d(f^i(f^n(x)), f^i(x)) \leq d(f^i(f^n(x)), y_i) + d(y_i, f^i(x)) < \delta \quad \text{für alle } i \in \mathbb{N},$$

und damit $f^n(x) = x$, da f als expansiv vorausgesetzt wurde. □

3.4.19 Satz: (vgl. [Urb 02, Prop. 3.3.b])

Sei $f : X \rightarrow X$ eine stetige Abbildung mit der periodischen Beschattungseigenschaft. Dann liegt $\text{Per}(f)$ dicht in $\Omega(f)$.

Beweis:

Seien $x \in \Omega(f)$ und $\beta > 0$ beliebig. Sei $\alpha > 0$ so gewählt, dass jeder periodische α -Pseudo-Orbit von einem echten periodischen Orbit β -beschattet wird. Sei ferner $V = B(x, \alpha)$. Nach der Definition von $\Omega(f)$ existieren $y \in V$ und $n \in \mathbb{N}$, so dass $f^n(y) \in V$. Daher ist $d(y, f^n(y)) \leq \alpha$ und folglich kann $(y, f(y), \dots, f^n(y))$ von einem periodischen Orbit β -beschattet werden. Da wir β beliebig klein wählen können, liegt $\text{Per}(f)$ dicht in $\Omega(f)$. \square

3.4.20 Satz (Spektrale Dekomposition): (vgl. [Urb 02, Theorem 3.3.4])

Sei $f : X \rightarrow X$ eine offene Abbildung mit der periodischen Beschattungseigenschaft, die auf $\text{cl}(\text{Per}(f))$ expandierend ist. Dann ist $\text{cl}(\text{Per}(f))$ die Vereinigung von endlich vielen disjunkten kompakten Mengen Ω_j , $j = 1, \dots, J$, so dass

$$(f|_{\text{cl}(\text{Per}(f))})^{-1}(\Omega_j) = \Omega_j$$

gilt und $f|_{\Omega_j} : \Omega_j \rightarrow \Omega_j$ topologisch transitiv ist. Jede der Mengen Ω_j ist die disjunkte Vereinigung von $k(j)$ kompakten Mengen Ω_j^k , die von f zyklisch permuiert werden, so dass $f^{k(j)}|_{\Omega_j^k} : \Omega_j^k \rightarrow \Omega_j^k$ topologisch exakt ist. Die disjunkte Zerlegung von $\text{cl}(\text{Per}(f))$ in die Mengen Ω_j heißt **spektrale Dekomposition**.

Wir wollen den vollständigen Beweis dieses Satzes, den man in [Urb 02, Theorem 3.3.4] findet, aufgrund seiner Länge hier nicht ausführen. Da wir jedoch im Folgenden auf die Grundidee des Beweises zurückgreifen wollen, skizzieren wir diese kurz: Für beliebige $x, y \in \text{Per}(f)$ schreibt man $x \sim \rightarrow y$, falls folgendes gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists x' \in X, m \geq 1 : d(x, x') < \varepsilon \text{ und } f^m(x') = f^m(y).$$

Dann wird durch

$$x \sim y \Leftrightarrow x \sim \rightarrow y \text{ und } y \sim \rightarrow x \tag{3.10}$$

eine Äquivalenzrelation auf $\text{Per}(f)$ definiert.

Wählt man $\xi > 0$ so, dass $B(f(x), \xi) \subset f(B(x, \frac{\varepsilon_0}{2}))$ für alle $x \in \text{cl}(\text{Per}(f))$ gilt, so folgt für zwei Punkte $x, y \in \text{Per}(f)$ mit $d(x, y) < \xi$ sofort $x \sim y$ (wähle $x' = f_x^{-n k_x k_y}(y)$ für n groß genug). Folglich ist die Anzahl der Äquivalenzklassen P_1, \dots, P_N endlich. Die Mengen $\text{cl}(P_1), \dots, \text{cl}(P_N)$ sind paarweise disjunkt und haben mindestens den Abstand ξ zueinander. Nun zeigt man leicht, dass f die Mengen P_i permuiert. Diese Permutation zerfällt in die zyklischen Permutationen, nach denen wir suchen.

3.4.21 Satz: (vgl. [Urb 02, Theorem 3.3.9])

Sei $f : X \rightarrow X$ eine offene expandierende Abbildung, oder expandierend auf $\text{cl}(\text{Per}(f))$ mit der periodischen Beschattungseigenschaft. Falls dann f topologisch transitiv ist, oder falls f surjektiv ist und die spektrale Dekomposition nur aus einer Menge $\Omega_1 = \bigcup_{k=1}^{k(1)} \Omega_1^k$ besteht, gilt folgendes:

- (a) $\text{Per}(f)$ liegt dicht in X und somit gilt $X = \Omega_1$.
- (b) Für jede nichtleere offene Menge $U \subset X$ existiert ein $N = N(U)$, so dass $\bigcup_{j=0}^N f^j(U) = X$.
- (c) Für alle $r > 0$ existiert ein $N \geq 0$, so dass für alle $x \in X$ gilt:

$$\bigcup_{j=0}^N f^j(B(x, r)) = X.$$

- (d) Für jedes $\beta > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ und jeden f -Orbit (x_0, \dots, x_n) (d. h. $x_{i+1} = f(x_i)$ für $i = 0, \dots, n-1$) ein periodischer Punkt y mit Periode $p \leq n+N$ existiert, dessen Vorwärtsorbit (x_0, \dots, x_n) β -beschattet.

Beweis:

Ist f topologisch transitiv, so gilt nach Lemma 1.1.13 $\Omega(f) = X$. Nach Satz 3.4.19 liegt $\text{Per}(f)$ dicht in $\Omega(f)$, woraus $\text{cl}(\text{Per}(f)) = X$ folgt.

Ist f surjektiv und gilt $J = 1$ ($\Omega_1 = \text{cl}(\text{Per}(f))$), so existiert für jedes $z \in X$ aufgrund der Surjektivität von f eine Folge $(z_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ mit $f(z_{-(n+1)}) = z_{-n}$ und $f(z_{-1}) = z$. Nach Lemma 1.1.13 liegt jeder Häufungswert von $(z_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ in $\Omega(f)$ und es gilt $\omega(x, f) \subset \Omega(f)$. Also existieren zu jedem $\alpha > 0$ Punkte $w_1, w_2 \in \text{Per}(f)$ und $k, n \in \mathbb{N}$ mit $f^k(w_2) \sim w_1$, $d(w_1, z_{-n}) \leq \alpha$ und $d(w_2, f^n(z)) \leq \alpha$. Daraus folgt die Existenz eines periodischen Punktes in $B(z, \beta)$, wobei $\beta > 0$ beliebig klein und $\alpha = \alpha(\beta) > 0$ gemäß der periodischen Beschattungseigenschaft gewählt ist. Also gilt $X = \text{cl}(\text{Per}(f)) = \Omega_1$.

Es folgt $X = \bigcup_{k=1}^{k(1)} \Omega_1^k$ und damit erhält man (b) unmittelbar aus der topologischen Exaktheit von $f^{k(1)}$ auf jeder der Mengen Ω_1^k , $k = 1, \dots, k(1)$.

Zu gegebenem $r > 0$ können wir aufgrund der Kompaktheit von X eine endliche Überdeckung $\{U_\alpha\}$ von X wählen, so dass $\text{diam } U_\alpha < \frac{r}{2}$. Wir setzen $N := \max_\alpha N(U_\alpha)$ gemäß (b). Ist nun $x \in X$ beliebig, so existiert ein α mit $x \in U_\alpha \subset B(x, r)$. Daraus folgt

$$\bigcup_{j=0}^N f^j(B(x, r)) \supset \bigcup_{j=0}^{N(U_\alpha)} f^j(U_\alpha) = X.$$

Nach (c) existiert zu jedem $\alpha > 0$ ein $N = N(\alpha)$, so dass für beliebige $v, w \in X$ ein $m \leq N$ und ein $z \in B(v, \alpha)$ existiert mit $f^m(z) \in B(w, \alpha)$. Sei (x_0, \dots, x_n) ein f -Orbit und $(x_0, \dots, x_{n-1}, z, \dots, f^{m-1}(z))$ ein α -Pseudo-Orbit mit $m \leq N$ und $z \in B(x_n, \alpha)$, $f^m(z) \in B(x_0, \alpha)$. Nach Korollar 3.4.18 kann dieser durch einen periodischen Orbit der Periode $n + m \leq n + N$ β -beschattet werden.

□

Als Folgerung aus Satz 3.4.21 erhält man das folgende erstaunliche Resultat:

3.4.22 Satz: (vgl. [Urb 02, Ex. 3.3.1])

Ist X zusammenhängend, so ist jede offene expandierende Abbildung $f : X \rightarrow X$ topologisch exakt.

Beweis:

$f(X) \subset X$ ist offen, da f offen ist und abgeschlossen, da f stetig ist. Folglich gilt $f(X) = X$, da X zusammenhängend ist. Für beliebige $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ definieren wir die Menge

$$A(x, \varepsilon) := \{y \in X \mid \exists x_1, \dots, x_n \in X : x_1 = x, x_n = y, d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon\}.$$

$A(x, \varepsilon)$ ist nichtleer, da $x \in A(x, \varepsilon)$ und offen, da mit jedem $y \in A(x, \varepsilon)$ offensichtlich auch $B(y, \varepsilon) \subset A(x, \varepsilon)$ gilt. Sei $(y_n)_{n \geq 1}$ eine Folge in $A(x, \varepsilon)$ mit $y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \in X$. Dann existiert ein Index $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $d(y, x_{n_0}) < \varepsilon$. Folglich gilt auch $y \in A(x, \varepsilon)$. Also ist $A(x, \varepsilon)$ abgeschlossen und damit ist $A(x, \varepsilon) = X$.

Seien nun $x, y \in \text{Per}(f)$ beliebig gewählt. Sei k_x die Primperiode von x und k_y die von y . Wir wollen zeigen, dass $x \sim y$ (im Sinne von (3.10)) gilt:

Sei $\beta = \frac{\xi}{2}$ (ξ so gewählt, dass $B(f(x), \xi) \subset f(B(x, \frac{\varepsilon_0}{2}))$ für alle $x \in X$ gilt) und sei $\alpha = \alpha(\beta)$ wie in der Definition der Beschriftungseigenschaft gewählt und $\alpha' = \min\{\alpha, \frac{\xi}{2}\}$. Nach dem oben Gezeigten existiert eine Folge $(z_i)_{i=1}^m$ mit $z_1 = x$, $z_m = y$ und $d(z_i, z_{i+1}) < \alpha'$ für $i = 1, \dots, m-1$. Sei $l \geq 1$ so groß gewählt, dass $\lambda^{-lk_x k_y} \xi < \frac{\alpha'}{m}$. Nun gilt $d(x, z_2) < \xi$, also $z_2 \in B(x, \xi) = B(f^{lk_y k_x}(x), \xi)$. Wir definieren $z'_1 := f_x^{-lk_x k_y}(z_2)$. Damit erhält man

$$d(x, z'_1) = d(f_x^{-lk_x k_y}(x), f_x^{-lk_x k_y}(z_2)) \leq \lambda^{-lk_x k_y} d(x, z_2) < \lambda^{-lk_x k_y} \xi < \frac{\alpha'}{m}.$$

Nun gilt $d(z_2, z_3) < \xi$ und $f^{lk_x k_y}(z'_1) = z_2$. Wir setzen $z'_2 := f_{z'_1}^{-lk_x k_y}(z_3)$. Daraus ergibt sich

$$d(z'_2, z'_1) = d(f_{z'_1}^{-lk_x k_y}(z_3), f_{z'_1}^{-lk_x k_y}(z_2)) < \lambda^{-lk_x k_y} \xi < \frac{\alpha'}{m}.$$

Führen wir diesen Prozess fort, so erhalten wir schließlich eine Folge $(z'_i)_{i=1}^{m-1}$, so dass $d(z'_{i+1}, z'_i) < \frac{\alpha'}{m}$ und $f^{lk_x k_y}(z'_i) = z_{i+1}$, insbesondere also $f^{lk_x k_y}(z'_{m-1}) = z_m = y$. Nun gilt nach der Dreiecksungleichung

$$d(x, z'_{m-1}) \leq d(x, z'_1) + d(z'_1, z'_2) + \dots + d(z'_{m-2}, z'_{m-1}) < \frac{(m-1)\alpha'}{m} < \alpha'.$$

Wir setzen $x' := z'_{m-1}$. Auf dieselbe Art und Weise finden wir einen Punkt $y' \in X$ mit $d(y, y') < \alpha'$ und $f^{lk_x k_y}(y') = x$. (x', y') ist ein periodischer α' -Pseudo-Orbit für $f^{lk_x k_y}$, denn $d(f^{lk_x k_y}(x'), y') = d(y, y') < \alpha'$ und $d(f^{lk_x k_y}(y'), x') = d(x, x') < \alpha'$. Daher ist $(x', f(x'), \dots, f^{lk_x k_y-1}(x'), y', f(y'), \dots, f^{lk_x k_y-1}(y'))$ ein periodischer α' -Pseudo-Orbit für f . Dieser wird β -beschattet von einem echten periodischen Orbit $O_f^+(w)$. Also gilt insbesondere

$$\begin{aligned} d(w, x) &\leq d(w, x') + d(x', x) < \beta + \alpha' \leq \frac{\xi}{2} + \frac{\xi}{2} = \xi. \\ d(f^{lk_x k_y}(w), y) &\leq d(f^{lk_x k_y}(w), y') + d(y', y) < \beta + \alpha' \leq \frac{\xi}{2} + \frac{\xi}{2} = \xi. \end{aligned}$$

Damit folgt $x \sim w \sim f^{lk_x k_y}(w) \sim y$. Wir haben damit gezeigt, dass alle periodischen Punkte von f äquivalent sind. Also besteht die spektrale Dekomposition von f nur aus einer Menge Ω_1 . Da wir zudem gesehen haben, dass f surjektiv

ist, gilt nach Satz 3.4.21 $X = \Omega_1 = \Omega(f)$. Da X zusammenhängend ist, kann Ω_1 nicht in mehrere (endlich viele) disjunkte kompakte Mengen zerfallen. Also ist f nach Satz 3.4.20 topologisch exakt. \square

3.4.23 Korollar:

Sei X zusammenhängend und $f : X \rightarrow X$ eine offene expandierende Abbildung. Existiert dann eine nichtleere offene Menge $U \subset X$, die homöomorph zu einer offenen Teilmenge von \mathbb{R}^n ist, so ist X eine n -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit.

Beweis:

Nach Satz 3.4.22 existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $f^n(U) = X$. Also existiert zu jedem $y \in X$ mindestens ein $x \in U$ mit $f^n(x) = y$. Da f nach Satz 3.4.7 eine endlichblättrige Überlagerung ist, ist nach Satz A.2.16 (h) auch f^n eine Überlagerung. Also existiert eine offene Umgebung U_y von y , die homöomorph zu einer offenen Umgebung U_x von x ist. Dabei können wir annehmen, dass $U_x \subset U$ gilt. Folglich ist U_x und damit auch U_y homöomorph zu einer offenen Teilmenge des \mathbb{R}^n . Daraus folgt die Aussage. \square

Mit Hilfe dieses Korollars ergibt sich eine weitere interessante Tatsache:

3.4.24 Korollar:

Sei X ein kompakter Längenraum und $f : X \rightarrow X$ eine offene expandierende Abbildung. Existiert dann eine nichtleere offene Teilmenge $U \subset X$ mit nach unten beschränkter Krümmung⁶, so ist X eine topologische Mannigfaltigkeit.

3.4.25 Bemerkung:

Einen Längenraum mit (nach unten oder nach oben) beschränkter Krümmung nennt man auch einen *Alexandrov-Raum*.

Beweis von Korollar 3.4.24:

Zunächst wollen wir zeigen, dass ein kompakter zusammenhängender metrischer Raum X , der eine offene expandierende Abbildung f zulässt, endliche Hausdorffdimension hat. Sei $\lambda > 1$ der Expansionsfaktor von f und $k \in \mathbb{N}$ die nach Satz 3.4.7 konstante Urbildzahl von f . Da X kompakt ist, können wir ein $r > 0$ finden, so dass jeder Ball mit Radius r gleichmäßig überlagert wird, z. B. können wir r als Lebesgue-Zahl einer Überdeckung von X mit gleichmäßig überlagerten Mengen wählen. Ferner finden wir eine endliche Überdeckung B_1, \dots, B_m von X mit r -Bällen. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $i = 1, \dots, m$ zerfällt die Menge $f^{-n}(B_i)$ in k^n offene disjunkte Mengen, die alle einen Durchmesser $< \frac{2r}{\lambda^n}$ haben und eine offene Überdeckung von X bilden. Seien diese Mengen mit C_1, \dots, C_{mk^n} bezeichnet. Dann gilt für jedes $\delta \geq 0$

$$w_\delta(\{C_i\}) = \sum_{i=1}^{mk^n} (\text{diam } C_i)^\delta < \sum_{i=1}^{mk^n} \left(\frac{2r}{\lambda^n} \right)^\delta = m(2r)^\delta \left(\frac{k}{\lambda^\delta} \right)^n.$$

⁶Der Begriff der Krümmung für Längenräume soll in dieser Arbeit nicht eingeführt werden. Dazu sei auf [Bur 01] verwiesen.

Folglich gilt auch

$$\mu_{\delta, \frac{2r}{k^n}}(X) = \inf \left\{ w_\delta(\{S_i\}) \mid \text{diam } S_i < \frac{2r}{k^n} \text{ für alle } i \right\} < m(2r)^\delta \left(\frac{k}{\lambda^\delta} \right)^n.$$

Und damit ergibt sich für das δ -dimensionale Hausdorffmaß von X die Abschätzung

$$\mu_\delta(X) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu_{\delta, \varepsilon}(X) \leq m(2r)^\delta \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{k}{\lambda^\delta} \right)^n.$$

Wegen $\lambda > 1$ kann δ so groß gewählt werden, dass $\lambda^\delta > k$ und folglich $\mu_\delta(X) = 0$ gilt. Damit ergibt sich

$$\dim_H X \leq \frac{\log k}{\log \lambda} < \infty. \quad (3.11)$$

Nun können wir die Aussage des Korollars auf wohlbekannte Sätze zurückführen: Die offene Teilmenge $U \subset X$ mit der induzierten Längenmetrik ist selbst ein Längenraum, und damit nach Voraussetzung ein Alexandrov-Raum. Nach [Bur 01, Theorem 10.8.2, S. 378] ist die Hausdorff-Dimension von U eine natürliche Zahl oder ∞ . Nach (3.11) gilt daher $\dim_H U \in \mathbb{N}_0$. Nach [Bur 01, Theorem 10.8.3] enthält U deshalb eine offene dichte Teilmenge, die eine topologische Mannigfaltigkeit ist. Damit folgt zusammen mit Korollar 3.4.23 die Behauptung. \square

3.4.26 Bemerkungen:

- Ein kompakter Längenraum, der eine offene expandierende Abbildung zulässt und keine topologische Mannigfaltigkeit ist, hat nach Korollar 3.4.24 auf einer dichten Teilmenge „Krümmung $-\infty$ “. Ob es einen solchen Raum gibt, ist mir nicht bekannt.
- Fordert man zusätzlich eine obere Schranke für die Krümmung auf ganz X , so ist X nach [Bur 01, Theorem 10.10.13, S. 404] sogar eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit einem C^3 -Atlas.

Als weitere Folgerung aus der Beschattungseigenschaft expandierender Abbildungen erhält man das folgende Robustheitsresultat.

3.4.27 Satz: (vgl. [Urb 02, Ex. 3.2.2])

Seien $f, g : X \rightarrow X$ stetig, g offen und expandierend. Dann gilt:

- (a) Zu jedem $\beta > 0$ existiert ein $\alpha > 0$, so dass für jede stetige Abbildung $\Phi : X \rightarrow X$ mit $\Delta(g \circ \Phi, \Phi \circ f) \leq \alpha$ eine stetige Abbildung $\Psi : X \rightarrow X$ existiert mit $g \circ \Psi = \Psi \circ f$ und $\Delta(\Phi, \Psi) \leq \beta$.
- (b) Ist auch f offen und expandierend, so existieren zu jedem $\beta > 0$ Konstanten $\alpha_f, \alpha_g > 0$, so dass für jeden Homöomorphismus $\Phi \in \mathcal{H}(X)$ mit $\Delta(g \circ \Phi, \Phi \circ f) \leq \alpha_g$ und $\Delta(f \circ \Phi^{-1}, \Phi^{-1} \circ g) \leq \alpha_f$ gilt: Es existiert ein Homöomorphismus $\Psi \in \mathcal{H}(X)$ mit $g \circ \Psi = \Psi \circ f$ und $\Delta^\pm(\Psi, \Phi) \leq 2\beta$.

Beweis:

- (a) Sei $\beta > 0$ gegeben und $\beta' = \min\{\beta, \frac{\varepsilon_0}{6}\}$, wobei ε_0 die Expansionskonstante von g sei. Nach dem Beschattungslemma existiert ein $\alpha = \alpha(\beta') > 0$ gemäß der Beschattungseigenschaft (bzgl. g). Gilt nun $\Delta(g \circ \Phi, \Phi \circ f) \leq \alpha$, so ist für beliebiges $x \in X$ die Folge $(\Phi(f^n(x)))_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein α -Pseudo-Orbit für g , denn

$$d(g(\Phi(f^n(x))), \Phi(f^{n+1}(x))) = d(g(\Phi(f^n(x))), \Phi(f(f^n(x)))) \leq \alpha.$$

Also existiert nach Lemma 3.4.15 höchstens und nach dem Beschattungslemma mindestens ein Punkt $y_x \in X$, dessen Vorwärtsorbit $O_g^+(y_x)$ den Pseudo-Orbit $(\Phi(f^n(x)))_{n \in \mathbb{N}_0}$ β -beschattet:

$$d(\Phi(f^n(x)), g^n(y_x)) \leq \beta \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0. \quad (3.12)$$

Wir definieren $\Psi : X \rightarrow X$ durch $\Psi(x) := y_x$ für alle $x \in X$. Dann folgt mit (3.12):

$$d(\Phi(x), \Psi(x)) = d(\Phi(x), y_x) \leq \beta \quad \text{für alle } x \in X.$$

Um die Gültigkeit der Gleichung $\Psi \circ f = g \circ \Psi$ nachzuweisen, müssen wir einsehen, dass $y_{f(x)} = g(y_x)$ gilt, also dass der Vorwärtsorbit von $g(y_x)$ den Pseudo-Orbit $(\Phi(f^n(f(x))))_{n \in \mathbb{N}}$ β -beschattet. Aber dies ist nach (3.12) klar. Es bleibt die Stetigkeit von Ψ zu zeigen. Sei dazu $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X mit $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$. Es ist zu zeigen, dass dann $y_k := y_{x_k} \rightarrow y_x$ gilt. Da Φ und f stetig sind, gilt $\Phi(f^n(x_k)) \rightarrow \Phi(f^n(x))$ für $k \rightarrow \infty$ und jedes $n \in \mathbb{N}_0$. Sei $k_0(n)$ der Index, so dass

$$d(\Phi(f^n(x_k)), \Phi(f^n(x))) < \frac{\varepsilon_0}{6} \quad \text{für alle } k \geq k_0(n).$$

Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $k \geq k_0(n)$

$$\begin{aligned} d(g^n(y_k), g^n(y_x)) &\leq d(g^n(y_k), \Phi(f^n(x_k))) \\ &\quad + d(\Phi(f^n(x_k)), \Phi(f^n(x))) \\ &\quad + d(\Phi(f^n(x)), g^n(y_x)) \\ &< 2\beta + \frac{\varepsilon_0}{6} < \frac{\varepsilon_0}{2}. \end{aligned}$$

Nach dieser Abschätzung gilt für jeden Häufungswert y^* von $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$

$$d(g^n(y^*), g^n(y_x)) \leq \frac{\varepsilon_0}{2} < \varepsilon_0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Da nach Lemma 3.4.2 g expansiv mit Expansionskonstante ε_0 ist, folgt daraus $y^* = y_x$. Da X kompakt ist, existiert mindestens ein Häufungswert y^* . Damit folgt $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = y_x$.

- (b) Aufgrund der gleichmäßigen Stetigkeit von Φ auf dem kompakten Raum X existiert ein $\delta_g > 0$, so dass aus $d(x, y) < \delta_g$ stets $d(\Phi(x), \Phi(y)) < \frac{\varepsilon_0(g)}{2}$ folgt. Wir setzen $\beta'_g := \min\{\beta, \frac{\varepsilon_0(g)}{6}, \delta_g\}$ und wählen $\alpha_g := \alpha(\beta'_g)$

gemäß der Beschattungseigenschaft wie in (a). Dann existiert nach (a) eine stetige Abbildung Ψ_g mit $g \circ \Psi_g = \Psi_g \circ f$ und $\Delta(\Psi_g, \Phi) \leq \beta'_g \leq \beta$. Analog erhält man Konstanten β'_f, α_f und eine stetige Abbildung Ψ_f mit $f \circ \Psi_f = \Psi_f \circ g$ und $\Delta(\Phi^{-1}, \Psi_f) \leq \beta'_f \leq \beta$. Es folgt

$$\Psi_g \circ \Psi_f \circ g = \Psi_g \circ f \circ \Psi_f = g \circ \Psi_g \circ \Psi_f,$$

und analog $\Psi_f \circ \Psi_g \circ f = f \circ \Psi_f \circ \Psi_g$. Ferner gilt

$$\begin{aligned} \Delta(\Psi_g \circ \Psi_f, \text{id}_X) &\leq \Delta(\Psi_g \circ \Psi_f, \Phi \circ \Psi_f) + \Delta(\Phi \circ \Psi_f, \Phi \circ \Phi^{-1}) \\ &\leq \frac{\varepsilon_0(g)}{6} + \frac{\varepsilon_0(g)}{2} < \varepsilon_0(g), \end{aligned}$$

und wiederum analog $\Delta(\Psi_f \circ \Psi_g, \text{id}_X) < \varepsilon_0(f)$. Nach Lemma 3.4.2 (c) gilt damit $\Psi_g \circ \Psi_f = \Psi_f \circ \Psi_g = \text{id}_X$. Es ist also $\Psi := \Psi_g$ ein Homöomorphismus mit den gewünschten Eigenschaften. \square

Zum Abschluss dieses Abschnitts wollen wir noch ein Beispiel für expandierende C^1 -Abbildungen angeben.

3.4.28 Beispiel:

Wir wollen zeigen, dass der lineare Torusendomorphismus $E_M : T^n \rightarrow T^n$ aus Beispiel 3.2.3 genau dann expandierend ist, wenn die Beträge der Eigenwerte von $M \in \mathbb{Z}^{n \times n} \subset \mathbb{R}^{n \times n}$ alle größer als 1 sind. Sei dazu $d : T^n \times T^n \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ eine mit der Topologie von T^n verträgliche Metrik. Wir nehmen an, dass E_M bzgl. d expandierend ist mit Konstanten $\lambda > 1$ und $\varepsilon_0 > 0$. Ferner sei $\zeta = re^{i\varphi}$ ein beliebiger Eigenwert von M . Dann unterscheiden wir zwei Fälle:

(i) Sei $|\zeta| = r < 1$. Dann existiert ein komplexer Eigenvektor $v + iw$, so dass

$$\lim_{k \rightarrow \infty} M^k(v + iw) = \lim_{k \rightarrow \infty} r^k e^{ik\varphi}(v + iw) = 0.$$

Daraus folgt insbesondere $\lim_{k \rightarrow \infty} M^k v = 0$. Folglich konvergiert $\pi(M^k v) = E_M^k(\pi(v))$ gegen $1 = \pi(0)$. Also existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so dass $d(E_M^k(\pi(v)), 1) < \varepsilon_0$ für alle $k \geq k_0$ gilt. Daraus folgt aber $\zeta^{k_0} v = 0$ und damit $\zeta = 0$. E_M ist folglich bei 1 nicht lokal injektiv, also erst recht nicht expandierend.

(ii) Sei $|\zeta| = r = 1$, also $\zeta = e^{i\varphi}$. Dann ist für jeden zugehörigen Eigenvektor $v + iw$ die kompakte Menge

$$S_{v,w} := \{\cos(\alpha)v - \sin(\alpha)w \mid \alpha \in [0, 2\pi]\}$$

vorwärtsinvariant unter M , wie folgende Rechnung zeigt:

$$\begin{aligned} M \cos(\alpha)v - M \sin(\alpha)w &= \cos(\alpha)(\cos(\varphi)v - \sin(\varphi)w) \\ &\quad - \sin(\alpha)(\cos(\varphi)w + \sin(\varphi)v) \\ &= (\cos(\varphi)\cos(\alpha) - \sin(\alpha)\sin(\varphi))v \\ &\quad - (\cos(\alpha)\sin(\varphi) + \sin(\alpha)\cos(\varphi))w \\ &= \cos(\alpha + \varphi)v - \sin(\alpha + \varphi)w. \end{aligned}$$

Wir können $\|v + iw\|$ klein genug wählen, dass $\pi(S_{v,w}) \subset B(1, \varepsilon_0)$ gilt. Daraus folgt

$$E_M^k(\pi(S_{v,w})) = \pi(M^k(S_{v,w})) \subset \pi(S_{v,w}) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N},$$

und folglich $d(E_M^k(x), E_M^k(1)) < \varepsilon_0$ für alle $x \in \pi(S_{v,w})$ und $k \in \mathbb{N}$, woraus $x = 1$ und damit $S_{v,w} = \{0\}$ folgt. Dies liefert $v = w = 0$ im Widerspruch dazu, dass $v + iw$ ein Eigenvektor ist.

Wir haben gezeigt, dass die Bedingung $|\zeta| > 1$ für alle Eigenwerte ζ von M notwendig dafür ist, dass E_M expandierend ist. Nun seien umgekehrt alle Eigenwerte von M dem Betrage nach als größer 1 vorausgesetzt. Dann ist M invertierbar und die Eigenwerte von M^{-1} sind die Inversen der Eigenwerte von M . Insbesondere können wir $\varepsilon > 0$ so klein wählen, dass $r(M^{-1}) + \varepsilon < 1$ gilt ($r(M^{-1})$ der Spektralradius von M^{-1}). Nach Satz A.6.3 existiert ein $C_\varepsilon > 0$, so dass

$$\|M^{-k}v\| \leq C_\varepsilon(r(M^{-1}) + \varepsilon)^k \|v\| \quad \text{für alle } v \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{N}$$

in der euklidischen Norm gilt. Wir setzen $c := C_\varepsilon^{-1}$ und $\mu := (r(M^{-1}) + \varepsilon)^{-1}$. Dann ist obige Zeile äquivalent zu:

$$\|M^k v\| \geq c\mu^k \|v\| \quad \text{für alle } v \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{N}.$$

Nun verwenden wir, dass die universelle Überlagerung $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow T^n$, $\pi(x_1, \dots, x_n) = (e^{2\pi i x_1}, \dots, e^{2\pi i x_n})$ eine lokale Isometrie ist, wenn T^n mit der vom euklidischen Skalarprodukt induzierten Riemannschen Metrik versehen wird. Für beliebiges $z \in T^n$ finden wir ein $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\pi(x) = z$. Für $y := Mx$ gilt $\pi(y) = E_M(z) =: w$. Nach der Kettenregel kommutiert also folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} T_x \mathbb{R}^n & \xrightarrow{M} & T_y \mathbb{R}^n \\ D\pi_x \downarrow & & \downarrow D\pi_y \\ T_z T^n & \xrightarrow[D(E_M)_z]{} & T_w T^n \end{array}$$

Folglich gilt für alle $v \in T_z T^n$ und $k \in \mathbb{N}$:

$$\|D(E_M^k)_z v\| = \|D\pi_y M^k D\pi_x^{-1} v\| = \|M^k D\pi_x^{-1} v\| \geq c\mu^k \|D\pi_x^{-1} v\| = c\mu^k \|v\|.$$

Nach Satz 3.4.4 (und anschließender Bemerkung) ist daher E_M expandierend in einer geeigneten Metrik. \diamond

Es sollte nicht unerwähnt bleiben, dass man das Beispiel folgendermaßen verallgemeinern kann: Sei N eine zusammenhängende und einfach zusammenhängende nilpotente Liegruppe mit einer linksinvarianten Metrik (wie z. B. \mathbb{R}^n). Sei ferner Γ eine diskrete Untergruppe von N mit kompaktem Quotienten N/Γ (wie z. B. $\Gamma = \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$). Dann heißt N/Γ *Nilmannigfaltigkeit*. Jeder injektive Endomorphismus $\varphi : \Gamma \rightarrow \Gamma$ besitzt eine eindeutige Fortsetzung zu einem Automorphismus A von N . Die projizierte Abbildung $\Phi_A : N/\Gamma \rightarrow N/\Gamma$,

$\Phi_A(x\Gamma) = A(x)\Gamma$, ist expandierend, falls alle Eigenwerte von $A_* : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}$ (\mathfrak{h} die Liealgebra von N) dem Betrage nach größer als 1 sind. Folgendes Diagramm veranschaulicht den Zusammenhang zwischen A , A_* und Φ_A .

$$\begin{array}{ccc}
 \mathfrak{h} & \xrightarrow{A_*} & \mathfrak{h} \\
 \exp \downarrow & & \downarrow \exp \\
 N & \xrightarrow{A} & N \\
 \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\
 N/\Gamma & \xrightarrow{\Phi_A} & N/\Gamma
 \end{array}$$

In [Grm 81] wird bewiesen, dass jede im Sinne von Satz 3.4.4 expandierende C^1 -Abbildung auf einer kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit topologisch konjugiert zu einer Abbildung von diesem Typ ist.

Kapitel 4

Kombinatorisch äquivalente Systeme

In diesem Kapitel geht es darum, die Konjugationsgleichung in eine Fixpunktgleichung eines geeignet definierten Operators umzuschreiben. Unser Ziel ist es, für stetige Abbildungen $f, g : X \rightarrow X$ einen sog. *Pullback-Operator* $\Phi_{fg} : \mathcal{H}_{fg} \rightarrow \mathcal{H}_{fg}$ zu konstruieren, der folgende Gleichung erfüllt:

$$h \circ f = g \circ \Phi_{fg}(h) \quad \text{für alle } h \in \mathcal{H}_{fg}. \quad (4.1)$$

Dabei soll \mathcal{H}_{fg} eine geeignete abgeschlossene Teilmenge von $\mathcal{H}(X)$ sein. Offensichtlich ist dann jeder Fixpunkt von Φ_{fg} eine Konjugation von f nach g .

4.1 Definition und Eigenschaften

Folgende Definition stellt einen Versuch dar, den Begriff der *kombinatorischen Äquivalenz* zu verallgemeinern (siehe z. B. [Mel 92, S. 93]).

4.1.1 Definition (Kombinatorisch äquivalentes Funktionensystem):
Es sei \mathcal{L} eine Menge von stetigen Abbildungen eines lokal kompakten Hausdorffraumes X in sich. $\mathcal{H}(X)$ sei mit der kompakt-offenen Topologie ausgestattet. Jedem Paar $(f, g) \in \mathcal{L} \times \mathcal{L}$ sei eine nichtleere abgeschlossene Menge $\mathcal{H}_{fg} \subset \mathcal{H}(X)$ und ein stetiger Operator $\Phi_{fg} : \mathcal{H}_{fg} \rightarrow \mathcal{H}_{fg}$ zugeordnet, so dass folgende Axiome für alle $f, g, f_1, f_2, f_3 \in \mathcal{L}$ erfüllt sind:

[P1] $\mathcal{H}_{fg} = \mathcal{H}_{gf}^{-1}$ und $\Phi_{fg}(h) = \Phi_{gf}(h^{-1})^{-1}$ für alle $h \in \mathcal{H}_{fg}$.

[P2] $\mathcal{H}_{f_1 f_3} = \mathcal{H}_{f_2 f_3} \circ \mathcal{H}_{f_1 f_2}$ und

$$\Phi_{f_1 f_3}(h \circ k) = \Phi_{f_2 f_3}(h) \circ \Phi_{f_1 f_2}(k)$$

für alle $h \in \mathcal{H}_{f_2 f_3}$ und $k \in \mathcal{H}_{f_1 f_2}$.

[P3] $h \circ f = g \circ \Phi_{fg}(h)$ für alle $h \in \mathcal{H}_{fg}$.

Dann nennen wir das Paar (\mathcal{L}, Φ) ein **kombinatorisch äquivalentes (Funktionen-)System (auf X)**. Φ_{fg} heißt der *Pullback-Operator* von f

nach g . Ist jedem $f \in \mathcal{L}$ eine abgeschlossene vorwärtsinvariante Menge $B_f \subset X$ zugeordnet ($f(B_f) \subset B_f$) und jedem Paar $(f, g) \in \mathcal{L} \times \mathcal{L}$ ein Homöomorphismus $\psi_{fg} : B_f \rightarrow B_g$ mit $h|_{B_f} = \psi_{fg} : B_f \rightarrow B_g$ für alle $h \in \mathcal{H}_{fg}$, so sprechen wir auch von einem **basierten System** und schreiben dafür $(\mathcal{L}, \Phi, \psi)$.

4.1.2 Bemerkungen:

- Ist $\mathcal{K} = (\mathcal{L}, \Phi)$ ein kombinatorisch äquivalentes System und $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}$, so ist auch $\mathcal{K}|_{\mathcal{A}} := (\mathcal{A}, \Phi|_{\mathcal{A} \times \mathcal{A}})$ ein kombinatorisch äquivalentes System.
- Aus den Axiomen [P1] und [P2] folgt, dass \mathcal{H}_{ff} eine Untergruppe von $\mathcal{H}(X)$ und $\Phi_{ff} : \mathcal{H}_{ff} \rightarrow \mathcal{H}_{ff}$ ein Homomorphismus ist. Aus Axiom [P1] folgt nämlich $\mathcal{H}_{ff} = \mathcal{H}_{ff}^{-1}$ und aus Axiom [P2] $\mathcal{H}_{ff} = \mathcal{H}_{ff} \circ \mathcal{H}_{ff}$. Also ist \mathcal{H}_{ff} unter Komposition und Inversenbildung abgeschlossen. Aus Axiom [P2] folgt $\Phi_{ff}(h \circ k) = \Phi_{ff}(h) \circ \Phi_{ff}(k)$ für alle $h, k \in \mathcal{H}_{ff}$.
- Aus Axiom [P2] folgt insbesondere für jedes Paar $(f, g) \in \mathcal{L} \times \mathcal{L}$ und festes $h_0 \in \mathcal{H}_{fg}$:

$$\Phi_{fg}(h) \equiv \Phi_{fg}(h_0) \circ \Phi_{ff}(h_0^{-1} \circ h). \quad (4.2)$$

Φ_{fg} ist also durch Φ_{ff} und $\Phi_{fg}(h_0)$ eindeutig bestimmt. Außerdem ergibt sich damit die Stetigkeit von Φ_{fg} automatisch aus der von Φ_{ff} (Beachte Satz 2.1.3 (c)). Durch zweimalige Anwendung von Axiom [P2] folgt für beliebige $f_0, f, g \in \mathcal{L}$ und $h \in \mathcal{H}_{fg}$, $h_0 \in \mathcal{H}_{f_0 g}$, $k_0 \in \mathcal{H}_{ff_0}$:

$$\Phi_{fg}(h) = \Phi_{f_0 g}(h_0) \circ \Phi_{f_0 f_0}(h_0^{-1} \circ h \circ k_0^{-1}) \circ \Phi_{ff_0}(k_0). \quad (4.3)$$

Also reduziert sich der Stetigkeitsnachweis aller Pullback-Operatoren sogar auf den eines einzigen (beliebig gewählten).

- Durch vollständige Induktion folgt man leicht aus Axiom [P3] die Identität

$$h \circ f^n = g^n \circ \Phi_{fg}^n(h) \quad \text{für alle } h \in \mathcal{H}_{fg} \text{ und } n \in \mathbb{N}. \quad (4.4)$$

- Ist $(\mathcal{L}, \Phi, \psi)$ ein basiertes System, so folgt aus Axiom [P3] unmittelbar, dass für jedes Paar $(f, g) \in \mathcal{L} \times \mathcal{L}$ die Einschränkungen $f|_{B_f} : B_f \rightarrow B_f$ und $g|_{B_g} : B_g \rightarrow B_g$ topologisch konjugiert durch $\psi_{fg} : B_f \rightarrow B_g$ sind.

4.1.3 Beispiel:

Sei X ein lokal kompakter Hausdorffraum und $\mathcal{L} \subset \mathcal{H}(X)$ eine Menge von Homöomorphismen. Wir definieren für beliebige $f, g \in \mathcal{L}$:

$$\mathcal{H}_{fg} := \mathcal{H}(X), \quad \Phi_{fg}(h) := g^{-1} \circ h \circ f.$$

Dann ist \mathcal{H}_{fg} nichtleer und abgeschlossen. Ferner ist Φ_{fg} nach Satz 2.1.3 (c) stetig, und man überzeugt sich leicht, dass die Axiome [P1] - [P3] für (\mathcal{L}, Φ) erfüllt sind. \diamond

4.1.4 Satz (Eigenschaften kombinatorisch äquivalenter Systeme):
Es sei (\mathcal{L}, Φ) ein kombinatorisch äquivalentes System auf einem kompakten oder lokal kompakten, lokal zusammenhängenden Hausdorffraum X . Dann gilt:

- (a) Für jedes Paar $(f, g) \in \mathcal{L} \times \mathcal{L}$ ist \mathcal{H}_{fg} eine Linksnebenklasse und \mathcal{H}_{gf} eine Rechtsnebenklasse von \mathcal{H}_{ff} .
- (b) \mathcal{H}_{fg} und $\mathcal{H}_{\tilde{f}\tilde{g}}$ sind für beliebige $f, g, \tilde{f}, \tilde{g} \in \mathcal{L}$ homöomorph. Außerdem gilt: \mathcal{H}_{fg} ist abgeschlossen (in $\mathcal{H}(X)$) genau dann, wenn \mathcal{H}_{FF} abgeschlossen ist für ein beliebiges $F \in \mathcal{L}$.
- (c) Ist X kompakt und metrisierbar, so ist $(\mathcal{H}_{fg}, \Delta^\pm)$ ein vollständiger metrischer Raum.

Beweis:

Nach Satz 2.2.1 bzw. 2.2.2 ist $(\mathcal{H}(X), \mathcal{T}_{CO})$ eine topologische Gruppe.

- (a) Nach Axiom [P2] gilt zum einen

$$\mathcal{H}_{fg} = \mathcal{H}_{fg} \circ \mathcal{H}_{ff} \quad (\text{Setze } f_1 = f_2 = f \text{ und } f_3 = g.) \quad (4.5)$$

und zum anderen

$$\mathcal{H}_{ff} = \mathcal{H}_{gf} \circ \mathcal{H}_{fg} \quad (\text{Setze } f_1 = f_3 = f \text{ und } f_2 = g.) \quad (4.6)$$

(4.5) lässt sich auch schreiben als

$$\mathcal{H}_{fg} = \bigcup_{h \in \mathcal{H}_{fg}} h \circ \mathcal{H}_{ff}$$

\mathcal{H}_{fg} ist also eine Vereinigung von Linksnebenklassen von \mathcal{H}_{ff} . Wir wollen zeigen, dass jedoch $h_1 \circ \mathcal{H}_{ff} = h_2 \circ \mathcal{H}_{ff}$ für beliebige $h_1, h_2 \in \mathcal{H}_{fg}$ gilt. Dies ist äquivalent zu $h_2^{-1} \circ h_1 \in \mathcal{H}_{ff}$. Nach Axiom [P1] gilt $\mathcal{H}_{gf} = \mathcal{H}_{fg}^{-1}$, also $h_2^{-1} \in \mathcal{H}_{gf}$. Schließlich folgt aus (4.6) $h_2^{-1} \circ h_1 \in \mathcal{H}_{ff}$. Es gilt folglich $\mathcal{H}_{fg} = h_0 \circ \mathcal{H}_{ff}$ für alle $h_0 \in \mathcal{H}_{fg}$. Analog zeigt man, dass \mathcal{H}_{gf} eine Rechtsnebenklasse von \mathcal{H}_{ff} ist.

- (b) Um einzusehen, dass \mathcal{H}_{fg} und $\mathcal{H}_{\tilde{f}\tilde{g}}$ homöomorph sind, betrachte man folgende Kette von homöomorphen Räumen:

$$\mathcal{H}_{fg} \rightarrow \mathcal{H}_{ff} \rightarrow \mathcal{H}_{\tilde{f}\tilde{f}} \rightarrow \mathcal{H}_{\tilde{f}\tilde{f}} \rightarrow \mathcal{H}_{\tilde{f}\tilde{g}}.$$

Ein Homöomorphismus von \mathcal{H}_{fg} nach \mathcal{H}_{ff} ist beispielsweise durch $h \mapsto h_0^{-1} \circ h$ mit $h_0 \in \mathcal{H}_{fg}$ gegeben. Da also \mathcal{H}_{FF} und \mathcal{H}_{fg} homöomorph sind durch die Einschränkung eines Homöomorphismus $\mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$, ist die Abgeschlossenheit von \mathcal{H}_{FF} äquivalent zu der von \mathcal{H}_{fg} .

- (c) Ist d eine Metrik auf X , so ist nach Satz 2.2.1 $(\mathcal{H}(X), \Delta^\pm)$ ein vollständiger metrischer Raum. Dann ist $(\mathcal{H}_{fg}, \Delta^\pm)$ als abgeschlossener Teilraum von $(\mathcal{H}(X), \Delta^\pm)$ nach Satz A.1.40 ebenfalls vollständig. \square

4.1.5 Satz (Stetigkeit von Pullback-Operatoren):

Es sei (\mathcal{L}, Φ) ein kombinatorisch äquivalentes System auf einem kompakten oder lokal kompakten und lokal zusammenhängenden Hausdorffraum X . Dann sind für jedes Paar $(f, g) \in \mathcal{L} \times \mathcal{L}$ folgende Aussagen äquivalent:

- (a) Φ_{fg} ist stetig.

- (b) Es existieren $f_0 \in \mathcal{L}$ und $h_0 \in \mathcal{H}_{ff}$, so dass $\Phi_{f_0 f_0}$ stetig bei h_0 ist.
- (c) Falls $(\mathcal{H}_{fg}, \mathcal{T}_{CO})$ metrisierbar ist durch die Supremumsmetrik Δ .¹ Φ_{fg} ist gleichmäßig stetig bzgl. Δ .

Beweis:

Äquivalenz von (a) und (b): Ist Φ_{fg} stetig, so ist wegen (4.3) auch $\Phi_{f_0 f_0}$ stetig, insbesondere in h_0 . Ist umgekehrt $\Phi_{f_0 f_0}$ stetig in h_0 , so ist $\Phi_{f_0 f_0}$ überall stetig, da $\Phi_{f_0 f_0} : \mathcal{H}_{f_0 f_0} \rightarrow \mathcal{H}_{f_0 f_0}$ nach Axiom [P2] ein Gruppenhomomorphismus und $\mathcal{H}_{f_0 f_0}$ als Untergruppe von $\mathcal{H}(X)$ (nach Satz 2.2.1 im kompakten Fall bzw. nach Satz 2.2.2 im lokal kompakten Fall) eine topologische Gruppe ist. Aufgrund der Identität (4.3) ist dann auch Φ_{fg} als Hintereinanderschaltung stetiger Abbildungen stetig (Beachte hier Satz 2.1.3 (c)).

Nun sei \mathcal{H}_{fg} metrisierbar durch Δ . Es reicht zu zeigen, dass aus der Stetigkeit von $\Phi_{fg} : \mathcal{H}_{fg} \rightarrow \mathcal{H}_{fg}$ die gleichmäßige Stetigkeit folgt. Seien dazu $\varepsilon > 0$ und $h_0 \in \mathcal{H}_{fg}$ beliebig gewählt. Aus der Stetigkeit von Φ_{fg} bei h_0 folgt:

$$\exists \delta > 0 : \Delta(h, h_0) < \delta \Rightarrow \Delta(\Phi_{fg}(h), \Phi_{fg}(h_0)) < \varepsilon.$$

Für beliebige $h, h_1 \in \mathcal{H}_{fg}$ mit (2.1) und (4.2) folgt unmittelbar

$$\begin{aligned} \Delta(h, h_1) &= \Delta(h \circ h_1^{-1} \circ h_0, h_0) < \delta \Rightarrow \Delta(\Phi_{fg}(h \circ h_1^{-1} \circ h_0), \Phi_{fg}(h_0)) < \varepsilon \\ &\Rightarrow \Delta(\Phi_{fg}(h \circ h_1^{-1} \circ h_0) \circ \Phi_{ff}(h_0^{-1} \circ h_1), \Phi_{fg}(h_0) \circ \Phi_{ff}(h_0^{-1} \circ h_1)) \\ &= \Delta(\Phi_{fg}(h), \Phi_{fg}(h_1)) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Damit ist die gleichmäßige Stetigkeit von Φ_{fg} bzgl. Δ gezeigt. \square

4.1.6 Korollar (Erweiterter Pullback-Operator):

Es sei (X, d) ein kompakter oder ein lokal zusammenhängender und lokal kompakter metrischer Raum. Ferner sei (\mathcal{L}, Φ) ein kombinatorisch äquivalentes System auf X , und $f, g \in \mathcal{L}$. $(\text{cl}(\mathcal{H}_{fg}), \mathcal{T}_{CO}) \subset (\mathcal{C}(X), \mathcal{T}_{CO})$ sei vollständig metrisierbar durch Δ .² Dann existiert ein eindeutig bestimmter gleichmäßig stetiger Operator $\Phi_{fg}^* : \text{cl}(\mathcal{H}_{fg}) \rightarrow \text{cl}(\mathcal{H}_{fg})$, so dass $\Phi_{fg}^*|_{\mathcal{H}_{fg}} = \Phi_{fg}$ und

$$h \circ f = g \circ \Phi_{fg}^*(h) \quad \text{für alle } h \in \text{cl}(\mathcal{H}_{fg}).$$

Wir nennen Φ_{fg}^* den **erweiterten Pullback-Operator von f nach g** .

Beweis:

Ist X kompakt, so ist nach Satz 2.1.6 und Satz A.1.40 $(\text{cl}(\mathcal{H}_{fg}), \Delta)$ ein vollständiger metrischer Raum. Da Φ_{fg} nach Satz 4.1.5 gleichmäßig stetig ist, existiert nach Satz A.1.41 eine eindeutig bestimmte gleichmäßig stetige Fortsetzung von Φ_{fg} nach $\text{cl}(\mathcal{H}_{fg})$. Diese werde mit Φ_{fg}^* bezeichnet. Es sei $h \in \text{cl}(\mathcal{H}_{fg})$. Dann existiert eine Folge $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathcal{H}_{fg} mit $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = h$. Also gilt:

$$h_n \circ f = g \circ \Phi_{fg}(h_n) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

¹ Wie wir bereits gezeigt haben, ist dies stets der Fall, falls (X, d) ein kompakter metrischer Raum ist, nach Satz 3.3.1 aber z. B. auch, falls $\mathcal{H}_{fg} = \mathcal{H}_L(\tilde{X}, \varphi)$.

² Dies ist im kompakten Fall stets erfüllt.

Damit ergibt sich unter Beachtung der Stetigkeit des Operators $h \mapsto g \circ h$:

$$\begin{aligned} h \circ f &= \Delta\text{-} \lim_{n \rightarrow \infty} (h_n \circ f) = \Delta\text{-} \lim_{n \rightarrow \infty} (g \circ \Phi_{fg}(h_n)) \\ &= g \circ \Delta\text{-} \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_{fg}(h_n) = g \circ \Phi_{fg}(\Delta\text{-} \lim_{n \rightarrow \infty} h_n) = g \circ \Phi_{fg}(h). \end{aligned}$$

□

4.1.7 Bemerkung:

Jeder Fixpunkt h des erweiterten Pullback-Operators Φ_{fg}^* ist eine Semikonjugation von f nach g , die sich als Limes einer Folge von Homöomorphismen darstellen lässt, im eindimensionalen Fall ($X = [0, 1]$ oder $X = S^1$) also eine monotone stetige Surjektion.

4.2 Konstruktion kombinatorisch äquivalenter Systeme

Der folgende Satz liefert die Existenz kombinatorisch äquivalenter Systeme von Liftungen bzgl. einer vorgegebenen normalen Projektion.

4.2.1 Satz (Kombinatorisch äquivalente Systeme für Liftungen):

Sei $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ eine normale Projektion mit Decktransformationsgruppe Γ . Sei ferner $\tilde{F} \in \mathcal{H}_L(\tilde{X})$ eine Liftung von $F \in \mathcal{C}(X)$. Dann existiert ein kombinatorisch äquivalentes System $(\tilde{\mathcal{L}}, \tilde{\Phi})$ auf \tilde{X} , wobei $\tilde{\mathcal{L}}$ alle Homöomorphismen $\tilde{f} \in \mathcal{H}_L(\tilde{X})$ enthält, für die es einen Homöomorphismus $\alpha \in \mathcal{H}(X)$ mit einer Liftung $\tilde{\alpha} \in \mathcal{H}_L(\tilde{X})$ gibt, so dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \Gamma & \xrightarrow{\tilde{f}^*} & \Gamma \\ \tilde{\alpha}^* \downarrow & & \downarrow \tilde{\alpha}^* \\ \Gamma & \xrightarrow{\tilde{F}^*} & \Gamma \end{array}$$

Beweis:

- (1) *Definition von $\tilde{\Phi}$:* Seien $\tilde{f}, \tilde{g} \in \tilde{\mathcal{L}}$. Dann existieren Homöomorphismen $\alpha_f, \alpha_g \in \mathcal{H}(X)$ mit Liftungen $\tilde{\alpha}_f, \tilde{\alpha}_g \in \mathcal{H}_L(\tilde{X})$, so dass $\tilde{F}^* \circ \tilde{\alpha}_f^* = \tilde{\alpha}_f^* \circ \tilde{f}^*$ und $\tilde{F}^* \circ \tilde{\alpha}_g^* = \tilde{\alpha}_g^* \circ \tilde{g}^*$. Da $\tilde{\alpha}_g$ als Liftung eines Homöomorphismus nach Satz 3.1.8 (c) einen Automorphismus auf Γ induziert, folgt

$$(\tilde{\alpha}_g^*)^{-1} \circ \tilde{\alpha}_f^* \circ \tilde{f}^* = \tilde{g}^* \circ (\tilde{\alpha}_g^*)^{-1} \circ \tilde{\alpha}_f^*.$$

Wir setzen $\varphi := \varphi_{\tilde{f}\tilde{g}} := (\tilde{\alpha}_g^*)^{-1} \circ \tilde{\alpha}_f^*$ und $\tilde{\mathcal{H}}_{\tilde{f}\tilde{g}} := \mathcal{H}_L(\tilde{X}, \varphi)$. Da $\tilde{\alpha}_g^{-1} \circ \tilde{\alpha}_f \in \mathcal{H}_L(\tilde{X}, \varphi)$, ist $\tilde{\mathcal{H}}_{\tilde{f}\tilde{g}}$ nicht leer. Der Pullback-Operator $\tilde{\Phi}_{\tilde{f}\tilde{g}}$ wird definiert durch

$$\tilde{\Phi}_{\tilde{f}\tilde{g}}(\tilde{h}) := \tilde{g}^{-1} \circ \tilde{h} \circ \tilde{f}.$$

Es ist zu zeigen, dass $\tilde{\Phi}_{\tilde{f}\tilde{g}}(\mathcal{H}_L(\tilde{X}, \varphi)) \subset \mathcal{H}_L(\tilde{X}, \varphi)$ gilt. Sei also $\tilde{h} \in \mathcal{H}_L(\tilde{X}, \varphi)$ und $\gamma \in \Gamma$. Dann folgt

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}_{\tilde{f}\tilde{g}}(\tilde{h}) \circ \gamma &= \tilde{g}^{-1} \circ \tilde{h} \circ \tilde{f} \circ \gamma = \tilde{g}^{-1} \circ \tilde{h}^*(\tilde{f}^*(\gamma)) \circ \tilde{h} \circ \tilde{f} \\ &= \tilde{g}^{-1} \circ \varphi(\tilde{f}^*(\gamma)) \circ \tilde{h} \circ \tilde{f} = \tilde{g}^{-1} \circ \tilde{g}^*(\varphi(\gamma)) \circ \tilde{h} \circ \tilde{f}.\end{aligned}$$

Aus $\tilde{g} \circ \gamma \equiv \tilde{g}^*(\gamma) \circ \tilde{g}$ folgt $\gamma \circ \tilde{g}^{-1} = \tilde{g}^{-1} \circ \tilde{g}^*(\gamma)$, also

$$\tilde{\Phi}_{\tilde{f}\tilde{g}}(\tilde{h}) \circ \gamma = \varphi(\gamma) \circ \tilde{g}^{-1} \circ \tilde{h} \circ \tilde{f} = \varphi(\gamma) \circ \tilde{\Phi}_{\tilde{f}\tilde{g}}(\tilde{h}).$$

$\tilde{\Phi}_{\tilde{f}\tilde{g}}$ ist also wohldefiniert. Die Stetigkeit ist nach Satz 2.1.3 (c) klar.

(2) Für jedes $\gamma \in \Gamma$ ist der durch

$$\Pi_\gamma : \tilde{h} \mapsto \tilde{h} \circ \gamma \circ \tilde{h}^{-1}, \quad \mathcal{H}(\tilde{X}) \rightarrow \mathcal{H}(\tilde{X}),$$

definierte Operator stetig, da $(\mathcal{H}(\tilde{X}), \mathcal{T}_{CO})$ nach Satz 2.2.2 eine topologische Gruppe ist. Ferner gilt

$$\mathcal{H}_L(\tilde{X}, \varphi) = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} \Pi_\gamma^{-1}(\varphi(\gamma)).$$

Als Schnitt abgeschlossener Mengen ist $\mathcal{H}_L(\tilde{X}, \varphi)$ damit abgeschlossen.

(3) *Nachweis der Axiome [P1] und [P2]:*

[P1] Sei $\varphi = (\alpha_g^*)^{-1} \circ \alpha_f^*$. Dann ist $\varphi^{-1} = (\alpha_f^*)^{-1} \circ \alpha_g^*$. Damit ist $\mathcal{H}_{\tilde{g}\tilde{f}} = \mathcal{H}_L(\tilde{X}, \varphi^{-1})$. Es ist also zu zeigen, dass $\mathcal{H}_L(\tilde{X}, \varphi)^{-1} = \mathcal{H}_L(\tilde{X}, \varphi^{-1})$ gilt. Das ist klar, denn $\tilde{h} \circ \gamma \equiv \varphi(\gamma) \circ \tilde{h}$ ist äquivalent zu $\tilde{h}^{-1} \circ \gamma' \equiv \varphi^{-1}(\gamma') \circ \tilde{h}^{-1}$. Ferner gilt

$$\tilde{\Phi}_{\tilde{g}\tilde{f}}(\tilde{h}^{-1})^{-1} = (\tilde{f}^{-1} \circ \tilde{h}^{-1} \circ \tilde{g})^{-1} = \tilde{g}^{-1} \circ \tilde{h} \circ \tilde{f} = \tilde{\Phi}_{\tilde{f}\tilde{g}}(\tilde{h}).$$

[P2] Dies ergibt sich aus einer ähnlich einfachen Überlegung wie [P1]. \square

4.2.2 Bemerkung:

Fixpunkte des Pullback-Operators $\tilde{\Phi}_{\tilde{f}\tilde{g}}$ liefern Konjugationen von f nach g . Hat nämlich $\tilde{\Phi}_{\tilde{f}\tilde{g}}$ einen Fixpunkt $\tilde{h} \in \mathcal{H}_L(\tilde{X}, \varphi)$, so ist \tilde{h} Liftung eines Homöomorphismus $h : X \rightarrow X$, und es gilt

$$h \circ f \circ \pi = \pi \circ \tilde{h} \circ \tilde{f} = \pi \circ \tilde{g} \circ \tilde{h} = g \circ h \circ \pi.$$

Aufgrund der Surjektivität von π folgt $h \circ f = g \circ h$.

4.2.1 Systeme stückweise monotoner Intervallabbildungen

In diesem Unterabschnitt wollen wir kombinatorisch äquivalente Systeme von stückweise invertierbaren Abbildungen eines kompakten Intervalls auf zwei verschiedene Arten konstruieren. Aus der ersten Konstruktion ergibt sich unmittelbar ein Konjugationsresultat. Wir bezeichnen dabei mit I stets das kompakte Einheitsintervall $[0, 1]$.

4.2.3 Definition (Stückweise monotone Intervallabbildungen):

Eine stetige Abbildung $f : I \rightarrow I$ mit einer endlichen Zahl von lokalen Extremalstellen heißt **stückweise monotone Intervallabbildung**. Eine solche Abbildung heißt **r -modal** ($r \in \mathbb{N}$), falls sie genau r Extremalstellen im Inneren von I besitzt und $f(\text{bd}(I)) \subset \text{bd}(I)$ gilt. Genauer fordern wir, dass es Punkte $0 = c_0 < c_1 < \dots < c_r < c_{r+1} = 1$ gibt, so dass die Einschränkung $f_j := f|_{[c_{j-1}, c_j]}$ für $j = 1, \dots, r+1$ streng monoton ist, und dass sich bei jedem der Punkte c_j ($j = 1, \dots, r$) das Monotonieverhalten von f ändert. Die Menge aller r -modalen Abbildungen werde mit $\mathcal{M}_r(I)$ bezeichnet. Die 1-modalen Abbildungen werden auch **unimodal** genannt. Für jedes $j \in \{1, \dots, r+1\}$ bezeichnen wir das offene Intervall (a_{j-1}, a_j) mit $I_j = I_j(f)$. Die Punkte c_1, \dots, c_r heißen auch **kritische Punkte** von f , und wir setzen $C_f := \{c_1, \dots, c_r\}$. Ferner definieren wir die **postkritische Menge** von f durch

$$P_f := \text{cl} \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} f^k(C_f) \right).$$

4.2.4 Bemerkungen:

- Die Forderung $f(\text{bd}(I)) \subset \text{bd}(I)$ ist keine wirkliche Einschränkung, denn jede stetige Abbildung eines kompakten Intervalls in sich kann auf ein größeres Intervall fortgesetzt werden, so dass der Rand des größeren Intervalls in sich abgebildet wird.
- Da wir das Einheitsintervall I als kompakten Teilraum von \mathbb{R} (mit der euklidischen Topologie) betrachten, können wir auf $\mathcal{C}(I)$ mit der Supremumsmetrik Δ arbeiten.
- Jede zu einer r -modalen Abbildung $f : I \rightarrow I$ konjugierte Intervallabbildung $g : I \rightarrow I$ ist offensichtlich wieder r -modal. Ist nämlich h eine Konjugation von f nach g und $C_f = \{c_1, \dots, c_r\}$, so ist $C_g = \{h(c_0), \dots, h(c_{r+1})\}$.

Ohne die Allgemeinheit wesentlich einzuschränken³, werden wir ab jetzt nur streng monoton wachsende Homöomorphismen als Konjugationsabbildungen in Betracht ziehen. Für die Menge dieser Homöomorphismen schreiben wir $\mathcal{H}^+(I)$. Sie ist offensichtlich eine abgeschlossene Untergruppe von $\mathcal{H}(I)$.

Nun seien $f, g : I \rightarrow I$ r -modale Abbildungen mit Partitionen $0 = c_0(f) < c_1(f) < \dots < c_r(f) < c_{r+1}(f) = 1$ von f und $0 = c_0(g) < c_1(g) < \dots < c_r(g) < c_{r+1}(g) = 1$ von g . Wir definieren als Definitionsbereich des Pullback-Operators Φ_{fg} von f nach g die Menge

$$\mathcal{H}_{fg} := \left\{ h \in \mathcal{H}^+(I) \mid h(f^k(c_j(f))) = g^k(c_j(g)) \quad \forall k \in \mathbb{N}_0, 0 \leq j \leq r+1 \right\}. \quad (4.7)$$

Damit ergibt sich das folgende Resultat:

³Ist f zu g topologisch konjugiert mittels $h^- \in \mathcal{H}^-(I) := \mathcal{H}(I) \setminus \mathcal{H}^+(I)$, so sind f und $\tilde{g} = i \circ g \circ i^{-1}$, $i(x) := 1 - x$, topologisch konjugiert mittels $h^+ = i \circ h^- \in \mathcal{H}^+(I)$.

4.2.5 Satz und Definition:

Sei $F \in \mathcal{M}_r(I)$. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes maximales basiertes System $\mathcal{K}(F) = (\mathcal{L}, \Phi, \psi)$ von r -modalen Abbildungen mit $F \in \mathcal{L}$, so dass \mathcal{H}_{fg} gemäß (4.7) definiert ist. Dabei ist

$$\psi_{fg} : P_f \rightarrow P_g, \quad f^k(c_j(f)) \mapsto g^k(c_j(g)).$$

$\mathcal{K}(F)$ heißt das **von F erzeugte kombinatorisch äquivalente Funktionsystem**. Zwei Abbildungen $F, G \in \mathcal{M}_r(I)$ heißen **kombinatorisch äquivalent**, falls $\mathcal{K}(F) = \mathcal{K}(G)$.

4.2.6 Bemerkung:

ψ_{fg} ist natürlich durch die Zuordnung $f^k(c_j(f)) \mapsto g^k(c_j(g))$, $j = 1, \dots, r$, $k \in \mathbb{N}$, eindeutig bestimmt, da die Menge der Vorwärtsorbits aller kritischen Punkte dicht in der postkritischen Menge liegt.

Beweis:

- (a) *Definition von \mathcal{L} :* Sei $\mathcal{L} := \{f \in \mathcal{M}_r(I) \mid \mathcal{H}_{fF} \neq \emptyset\}$. Dann gilt $\mathcal{H}_{fg} \neq \emptyset$ für beliebige $f, g \in \mathcal{L}$, denn es gilt stets $h_1 \circ h_2 \in \mathcal{H}_{fg}$, falls $h_2 \in \mathcal{H}_{fF} \neq \emptyset$ und $h_1 \in \mathcal{H}_{gF}^{-1} \neq \emptyset$. Aus $h_2(f^k(c_j(f))) = F^k(c_j(F))$ und $h_1^{-1}(g^k(c_j(g))) = F^k(c_j(F))$ folgt nämlich $h_1 \circ h_2(f^k(c_j(f))) = g^k(c_j(g))$.
- (b) *Definition von Φ_{fg} :* Es seien $f, g \in \mathcal{L}$ beliebig gewählt. Um die Notation zu vereinfachen, bezeichnen wir die Partition von f mit $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_r < a_{r+1} = 1$ und die von g mit $0 = b_0 < b_1 < \dots < b_r < b_{r+1} = 1$. Für beliebiges $h \in \mathcal{H}_{fg}$ definieren wir

$$\Phi_{fg}(h)(x) := g_j^{-1} \circ h \circ f_j(x), \quad \text{falls } x \in [a_{j-1}, a_j].$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert, denn wegen $h(f(a_{j-1})) = g(b_{j-1})$ und $h(f(a_j)) = g(b_j)$, bildet die streng monotone und stetige Abbildung h das kompakte Intervall mit den Randpunkten $f(a_{j-1})$ und $f(a_j)$ homöomorph auf das kompakte Intervall mit den Randpunkten $g(b_{j-1})$ und $g(b_j)$ ab. Dieses ist gerade der Definitionsbereich der Abbildung g_j^{-1} . Die Abbildung $\Phi_{fg}(h)$ ist zudem stetig, was auf den Intervallen $I_j = (a_{j-1}, a_j)$ trivial ist, und an den Partitionspunkten a_j durch die Identität

$$\begin{aligned} g_j^{-1}(h(f_j(a_j))) &= g_j^{-1}(g_j(b_j)) = b_j \\ &= g_{j+1}^{-1}(g_{j+1}(b_j)) = g_{j+1}^{-1}(h(f_{j+1}(a_j))) \end{aligned}$$

gewährleistet wird. Die Injektivität von $\Phi_{fg}(h)$ folgt dann schließlich aus der Injektivität der hintereinandergeschalteten Abbildungen und die Surjektivität aus $\Phi_{fg}(h)(0) = 0$, $\Phi_{fg}(h)(1) = 1$ und dem Zwischenwertssatz. $\Phi_{fg}(h)$ ist offensichtlich streng monoton wachsend und somit gilt $\Phi_{fg}(h) \in \mathcal{H}^+(I)$. Für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ und $j \in \{0, 1, \dots, r+1\}$ existiert mindestens ein $j_0 \in \{1, \dots, r+1\}$, so dass $f^k(a_j) \in [a_{j_0-1}, a_{j_0}]$ und damit $g^k(b_j) \in h([a_{j_0-1}, a_{j_0}]) = [b_{j_0-1}, b_{j_0}]$. Also gilt

$$\begin{aligned} \Phi_{fg}(h)(f^k(a_j)) &= g_{j_0}^{-1} \circ h \circ f_{j_0}(f^k(a_j)) \\ &= g_{j_0}^{-1}(h(f^{k+1}(a_j))) = g_{j_0}^{-1}(g^{k+1}(b_j)) = g^k(b_j). \end{aligned}$$

Damit ist die Vorwärtsinvarianz von \mathcal{H}_{fg} unter Φ_{fg} gewährleistet.

- (c) *Axiome und Abgeschlossenheit von \mathcal{H}_{fg} :* Trivial.
- (d) *Stetigkeit von Φ_{fg} :* Um die Stetigkeit von Φ_{fg} nachzuweisen, sei $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Aufgrund der gleichmäßigen Stetigkeit von g_j^{-1} auf dem kompakten Definitionsbereich $g_j([b_{j-1}, b_j])$ existiert ein $\delta_j > 0$, so dass für alle $x, y \in g_j([b_{j-1}, b_j])$ mit $|x - y| < \delta_j$ gilt: $|g_j^{-1}(x) - g_j^{-1}(y)| < \varepsilon$. Wählen wir $\delta = \min_{j=1, \dots, r+1} \delta_j$, so gilt für beliebige $h_1, h_2 \in \mathcal{H}_{fg}$:

$$\begin{aligned} \Delta(h_1, h_2) < \delta &\Leftrightarrow |h_1(y) - h_2(y)| < \delta \quad \forall y \in I \\ &\Rightarrow |g_{j(y)}^{-1}(h_1(y)) - g_{j(y)}^{-1}(h_2(y))| < \varepsilon \quad \forall y \in I \\ &\Rightarrow |g_{j(x)}^{-1}(h_1(f_{j(x)}(x))) - g_{j(x)}^{-1}(h_2(f_{j(x)}(x)))| < \varepsilon \quad \forall x \in I \\ &\Rightarrow \Delta(\Phi_{fg}(h_1), \Phi_{fg}(h_2)) < \varepsilon. \end{aligned}$$

- (e) *Eindeutigkeit und Maximalität:* Da \mathcal{L} bereits alle r -modalen Abbildungen f enthält, für die $\mathcal{H}_{fF} \neq \emptyset$ gilt, ist \mathcal{L} (in diesem Sinne) maximal. Die Eindeutigkeit von (\mathcal{L}, Φ) ist klar für \mathcal{L} . Für Φ ist sie auch leicht einzusehen: Sei $\Phi'_{fg} : \mathcal{H}_{fg} \rightarrow \mathcal{H}_{fg}$ ein weiterer Pullback-Operator von f nach g . Dann folgt für alle $h \in \mathcal{H}_{fg}$:

$$g \circ \Phi_{fg}(h) = g \circ \Phi'_{fg}(h).$$

Da $\Phi_{fg}(h), \Phi'_{fg}(h) \in \mathcal{H}_{fg}$, bilden diese Homöomorphismen das Intervall $[a_{j-1}, a_j]$ auf $[b_{j-1}, b_j]$ ab. Da $g_j = g|_{[b_{j-1}, b_j]}$ injektiv ist, folgt

$$\begin{aligned} g_j \circ \Phi_{fg}(h)|_{[a_{j-1}, a_j]} &= g_j \circ \Phi'_{fg}(h)|_{[a_{j-1}, a_j]} \\ &\Rightarrow \Phi_{fg}(h)(x) = \Phi'_{fg}(h)(x) \quad \text{für alle } x \in [a_{j-1}, a_j]. \end{aligned}$$

□

4.2.7 Korollar (Konjugiertheit r -modaler Abbildungen):

Sind $f, g \in \mathcal{M}_r(I)$ zwei kombinatorisch äquivalente r -modale Abbildungen, so existiert eine streng monoton wachsende Bijektion $\sigma : \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(C_f) \rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} g^n(C_g)$, so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} f^k(C_f) & \xrightarrow{f} & \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} f^k(C_f) \\ \sigma \downarrow & & \downarrow \sigma \\ \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} g^k(C_g) & \xrightarrow{g} & \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} g^k(C_g) \end{array}$$

kommutiert. Liegen die Mengen $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} f^k(C_f)$ und $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} g^k(C_g)$ dicht in I , so lässt sich σ zu einer Konjugation $h : I \rightarrow I$ von f nach g fortsetzen.

Beweis:

Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ und $F \in \{f, g\}$ definieren wir

$$A_n(F) := \bigcup_{k \geq -n} F^k(C_F), \quad A_\infty(F) := \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} F^k(C_F).$$

Seien $h \in \mathcal{H}_{fg}$ und $n \in \mathbb{N}$ beliebig gewählt. Sei ferner $x \in f^{-n}(c_j(f))$ für ein $j \in \{1, \dots, r\}$. Dann folgt

$$\Phi_{fg}^n(h)(x) \in g^{-n}(h(f^n(x))) = g^{-n}(h(c_j(f))) = g^{-n}(c_j(g)).$$

Insbesondere kommutiert für alle $H \in \Phi_{fg}^n(\mathcal{H}_{fg})$ und $n \geq 1$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A_n(f) & \xrightarrow{f} & A_{n-1}(f) \\ H \downarrow & & \downarrow H \\ A_n(g) & \xrightarrow{g} & A_{n-1}(g) \end{array}$$

und offensichtlich ist $\sigma_n := H|_{A_n(f)}: A_n(f) \rightarrow A_n(g)$ eine wohldefinierte, von der Wahl von H unabhängige, streng monoton wachsende Bijektion. Daher ist die durch

$$\sigma: A_\infty(f) \rightarrow A_\infty(g), \quad \sigma(x) := \sigma_n(x) \text{ für alle } x \in A_n(f), \quad n \in \mathbb{N},$$

definierte Abbildung ebenfalls streng monoton wachsend und bijektiv. Ferner gilt $\sigma(f(x)) = g(\sigma(x))$ für alle $x \in A_\infty(f)$. Falls die Mengen $A_\infty(f)$ und $A_\infty(g)$ beide dicht in I liegen, findet sich zu jedem x im Inneren von I eine monoton wachsende Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $A_\infty(f)$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. Dann ist die durch $h(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(x_n)$, $h: I \rightarrow I$, definierte Funktion eine Konjugation von f nach g . (Die Surjektivität von h folgt daraus, dass auch $A_\infty(g)$ dicht in I liegt; die strikte Monotonie überträgt sich von σ auf h .) \square

4.2.8 Bemerkungen:

- Aus Korollar 4.2.7 folgt, dass unsere Definition von kombinatorischer Äquivalenz die kombinatorische Äquivalenz im Sinne von [Mel 92, S. 93] impliziert.
- Die Voraussetzung, dass die Menge $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} F^k(C_F)$ dicht in I liegt, ist insbesondere erfüllt, wenn F topologisch transitiv oder stückweise expandierend ist (siehe z. B. [Fot 01]).

Nun wollen wir noch eine zweite Methode zur Konstruktion von kombinatorisch äquivalenten Funktionensystemen vorstellen, die Aussagen über die Konjugiertheit von stückweise monotonen Intervallabbildungen zulassen. Dabei betrachten wir ausschließlich r -modale Abbildungen f mit $f(c_i(f)) \in \text{bd}(I)$ für $i = 1, \dots, r$, da diese, wie wir sehen werden, bzgl. einer geeigneten normalen Projektion zu Homöomorphismen liftbar sind. Es erweist sich als günstiger, r -modale Abbildungen auf $[-1, 1]$ statt auf $[0, 1]$ zu betrachten. Den entsprechenden Funktionenraum bezeichnen wir mit $\mathcal{M}_r([-1, 1])$. Mit $\mathcal{H}^+(\mathbb{R})$ seien die monoton wachsenden und mit $\mathcal{H}^-(\mathbb{R})$ die monoton fallenden Homöomorphismen in $\mathcal{H}(\mathbb{R})$ bezeichnet. Wir definieren die Abbildung

$$\pi: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1], \quad \pi(x) := -\cos(2\pi x).$$

Dann ist, wie man sich leicht anhand der Eigenschaften der Cosinusfunktion überlegt, die Einschränkung

$$\pi_n := \pi|_{[\frac{n}{2}, \frac{n+1}{2}]}, \quad \pi_n : [\frac{n}{2}, \frac{n+1}{2}] \rightarrow [-1, 1]$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$ ein Homöomorphismus. Nach Beispiel 3.1.9 ist π eine normale Projektion⁴ mit Decktransformationsgruppe

$$\Gamma = \{\gamma_k^\pm\}_{k \in \mathbb{Z}}, \text{ wobei } \gamma_k^\pm(x) \equiv k \pm x.$$

4.2.9 Notation:

Wir verwenden ab jetzt die Abkürzungen $f_1 \uparrow$ (bzw. $f_1 \downarrow$) für „ $f_1 = f|_{[-1, a_1]}$ ist monoton wachsend (bzw. fallend)“.

4.2.10 Satz (Liftungen r -modaler Abbildungen):

Sei $f \in \mathcal{M}_r([-1, 1])$. Gilt $f_1 \uparrow$ (bzw. $f_1 \downarrow$), so existiert genau eine monoton wachsende (bzw. fallende) Liftung $\tilde{f} \in \mathcal{H}(\mathbb{R})$ von f mit $\tilde{f}(0) = 0$ (bzw. $\tilde{f}(0) = \frac{1}{2}$). Der von \tilde{f} auf Γ induzierte Endomorphismus ist gegeben durch

$$\tilde{f}^*(\gamma) = \begin{cases} \gamma_{(r+1)n}^\pm & \text{falls } f_1 \uparrow \text{ und } \gamma = \gamma_n^\pm \\ \gamma_{-(r+1)n}^+ & \text{falls } f_1 \downarrow \text{ und } \gamma = \gamma_n^+ \\ \gamma_{-(r+1)n+1}^- & \text{falls } f_1 \downarrow \text{ und } \gamma = \gamma_n^- \end{cases}.$$

Beweis:

(1) Existenz: Auf dem Intervall $[0, \frac{1}{2}]$ definieren wir \tilde{f} wie folgt:

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} \pi_{j-1}^{-1} \circ f_j \circ \pi_0(x) & \text{falls } f_1 \uparrow \\ \pi_{1-j}^{-1} \circ f_j \circ \pi_0(x) & \text{falls } f_1 \downarrow \end{cases} \text{ für } x \in [\pi_0^{-1}(a_{j-1}), \pi_0^{-1}(a_j)].$$

Dabei läuft j von 1 bis $r + 1$. Dies ist sinnvoll, denn

$$0 = \pi_0^{-1}(-1) = \pi_0^{-1}(a_0) < \pi_0^{-1}(a_1) < \dots < \pi_0^{-1}(a_{r+1}) = \pi_0^{-1}(1) = \frac{1}{2}.$$

Ferner gilt

$$f_j(\pi_0([\pi_0^{-1}(a_{j-1}), \pi_0^{-1}(a_j)])) = f_j([a_{j-1}, a_j]) = [-1, 1],$$

woraus folgt:

$$\tilde{f}([\pi_0^{-1}(a_{j-1}), \pi_0^{-1}(a_j)]) = \begin{cases} \pi_{j-1}^{-1}([-1, 1]) = [\frac{j-1}{2}, \frac{j}{2}] & \text{falls } f_1 \uparrow \\ \pi_{1-j}^{-1}([-1, 1]) = [\frac{1-j}{2}, \frac{2-j}{2}] & \text{falls } f_1 \downarrow \end{cases}.$$

Es ist also $\tilde{f}([0, \frac{1}{2}]) = [0, \frac{r+1}{2}]$, falls f_1 monoton wächst, und andernfalls $\tilde{f}([0, \frac{1}{2}]) = [-\frac{r}{2}, \frac{1}{2}]$. Die Stetigkeit von \tilde{f} ist lediglich an den Stellen $\pi_0^{-1}(a_j)$ zu überprüfen:

⁴Das negative Vorzeichen vor der Cosinusfunktion hat keine wesentlichen Auswirkungen.

Fall 1: $f_1 \uparrow$: Dann ist zu zeigen, dass $\pi_{j-1}^{-1}(f_j(a_j)) = \pi_j^{-1}(f_{j+1}(a_j))$ für $j = 1, \dots, r$ gilt. Es ist $f(-1) = f(a_0) = -1$ und daher $f_j(a_j) = f_{j+1}(a_j) = f(a_j) = (-1)^{j+1}$. Ferner gilt

$$\pi_{j-1}^{-1}((-1)^{j+1}) = \pi_j^{-1}((-1)^{j+1}) = \frac{j}{2},$$

da $\pi_{j-1}(\frac{j}{2}) = -\cos(\pi j) = (-1)^{j+1}$ und $\frac{j}{2} \in [\frac{j-1}{2}, \frac{j}{2}] \cap [\frac{j}{2}, \frac{j+1}{2}]$. Weil jede der Kompositionen $\pi_j^{-1} \circ f_i \circ \pi_0$ streng monoton ist, ist es auch \tilde{f} . Genauer: \tilde{f} ist streng monoton wachsend, da π_0 streng monoton wächst und f_j und π_{j-1}^{-1} stets vom gleichen Monotonietyp sind.

Fall 2: $f_1 \downarrow$: Dann ist zu zeigen, dass $\pi_{1-j}^{-1}(f_j(a_j)) = \pi_{-j}^{-1}(f_{j+1}(a_j))$ für $j = 1, \dots, r$ gilt: Es ist $f(-1) = f(a_0) = 1$ und daher $f_j(a_j) = f_{j+1}(a_j) = f(a_j) = (-1)^j$. Ferner gilt

$$\pi_{1-j}^{-1}((-1)^j) = \pi_{-j}^{-1}((-1)^j) = \frac{1-j}{2},$$

da $\pi_{1-j}(\frac{1-j}{2}) = -\cos(\pi(1-j)) = (-1)^j$ und $\frac{1-j}{2} \in [-\frac{j}{2}, \frac{1-j}{2}] \cap [\frac{1-j}{2}, \frac{2-j}{2}]$. Da jede der Kompositionen $\pi_j^{-1} \circ f_j \circ \pi_0$ streng monoton ist, ist es auch \tilde{f} . Genauer: \tilde{f} ist streng monoton fallend, da π_0 streng monoton wächst und f_j und π_{1-j}^{-1} stets von unterschiedlichem Monotonietyp sind.

Auf $[\frac{1}{2}, 1]$ definieren wir \tilde{f} durch

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} r+1 - \tilde{f}(1-x) & \text{falls } f_1 \uparrow \\ -r - \tilde{f}(1-x) & \text{falls } f_1 \downarrow \end{cases}.$$

Das ist sinnvoll, da $1 - [\frac{1}{2}, 1] = [0, \frac{1}{2}]$. Außerdem ist \tilde{f} bei $\frac{1}{2}$ wohldefiniert, denn

$$\tilde{f}(\frac{1}{2}) = \begin{cases} r+1 - \tilde{f}(\frac{1}{2}) = r+1 - \frac{r+1}{2} = \frac{r+1}{2} & \text{falls } f_1 \uparrow \\ -r - \tilde{f}(\frac{1}{2}) = -r - (-\frac{r}{2}) = -\frac{r}{2} & \text{falls } f_1 \downarrow \end{cases}.$$

Offensichtlich ist \tilde{f} dann auf $[0, 1]$ monoton und es gilt $f_1(1) = r+1$, falls $f_1 \uparrow$ und andernfalls $f_1(1) = -r - \frac{1}{2}$. Durch $\tilde{f}|_{[0,1]}$ ist \tilde{f} eindeutig bestimmt, denn

$$\pi(\tilde{f}(x+n)) = f(\pi(x+n)) = f(\pi(x)) = \pi(\tilde{f}(x)) \text{ für alle } n \in \mathbb{Z},$$

woraus folgt, dass \tilde{f} nur periodisch fortgesetzt werden kann durch

$$\tilde{f}(x+n) := \begin{cases} \tilde{f}(x) + n(r+1) & \text{falls } f_1 \uparrow \\ \tilde{f}(x) - n(r+1) & \text{falls } f_1 \downarrow \end{cases} \text{ für alle } n \in \mathbb{Z}.$$

Es ist offensichtlich, dass die so fortgesetzte Abbildung ein Homöomorphismus $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist und nach Definition ist $f \circ \pi = \pi \circ \tilde{f}$ erfüllt. Außerdem folgt sofort

$$\tilde{f}^*(\gamma_n^+) = \begin{cases} \gamma_{(r+1)n}^+ & \text{falls } f_1 \uparrow \\ \gamma_{-(r+1)n}^+ & \text{falls } f_1 \downarrow \end{cases} \text{ für alle } n \in \mathbb{Z}.$$

Ferner gilt nach Definition für $f_1 \uparrow$:

$$\begin{aligned}\tilde{f}(\gamma_n^-(x)) &= \tilde{f}(-x + n) = \tilde{f}(1 - x + (n - 1)) = \tilde{f}(1 - x) + (n - 1)(r + 1) \\ &= -\tilde{f}(x) + (r + 1) + (n - 1)(r + 1) = \gamma_{(r+1)n}^-(\tilde{f}(x)),\end{aligned}$$

und für $f_1 \downarrow$:

$$\begin{aligned}\tilde{f}(\gamma_n^-(x)) &= \tilde{f}(-x + n) = \tilde{f}(1 - x + (n - 1)) = \tilde{f}(1 - x) - (n - 1)(r + 1) \\ &= -\tilde{f}(x) - r - (n - 1)(r + 1) = \gamma_{-n(r+1)+1}^-(\tilde{f}(x)).\end{aligned}$$

- (2) *Eindeutigkeit:* (O. B. d. A. nur für $f_1 \uparrow$) Sei $\tilde{f}' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ein weiterer monoton wachsender Homöomorphismus mit $\tilde{f}'(0) = 0$ und $f \circ \pi = \pi \circ \tilde{f}'$. Dann gilt also

$$\cos(2\pi\tilde{f}(x)) \equiv \cos(2\pi\tilde{f}'(x)) \Rightarrow \tilde{f}(x) \equiv k \pm \tilde{f}'(x)$$

für ein $k \in \mathbb{Z}$. Aus $\tilde{f}(0) = \tilde{f}'(0) = 0$ folgt $k = 0$, und da \tilde{f}' und \tilde{f} beide monoton wachsen, gilt $\tilde{f} \equiv \tilde{f}'$. \square

4.2.11 Satz:

Zu jedem $r \in \mathbb{N}$ existieren kombinatorisch äquivalente Systeme $(\tilde{\mathcal{L}}^+, \tilde{\Phi}^+)$ bzw. $(\tilde{\mathcal{L}}^-, \tilde{\Phi}^-)$ auf \mathbb{R} , so dass jede r -modale Abbildung $f \in \mathcal{M}_r([-1, 1])$ entweder eine Liftung in $\tilde{\mathcal{L}}^+$ besitzt, falls $f_1 \uparrow$, oder eine Liftung in $\tilde{\mathcal{L}}^-$, falls $f_1 \downarrow$.

Beweis:

Nach Satz 4.2.10 existieren Endomorphismen $\varphi^\pm : \Gamma \rightarrow \Gamma$, so dass jede r -modale Abbildung $F \in \mathcal{M}_r([-1, 1])$ mit $F_1 \uparrow$ (bzw. $F_1 \downarrow$) eine streng monoton wachsende (bzw. fallende) Liftung \tilde{F} besitzt, die den Endomorphismus φ^+ (bzw. φ^-) induziert. Der Rest folgt aus Satz 4.2.1. \square

4.2.2 Systeme von Überlagerungen kompakter Hausdorffräume

In diesem Abschnitt sei X ein hinreichend zusammenhängender kompakter Hausdorffraum.⁵ Für die Menge aller Abbildungen $f \in \mathcal{C}(X)$ mit $f(x_0) = x_1$ schreiben wir $\mathcal{C}(X, x_0, x_1)$. Wir wollen basierte Systeme von Überlagerungen $f : X \rightarrow X$ mit Fixpunkten konstruieren. Für zwei solcher Überlagerungen f und g mit Fixpunkten x_f bzw. x_g definieren wir die Menge

$$\mathcal{H}_{fg} := \{h \in \mathcal{H}(X) \mid h_* f_* = g_* h_* : \pi_1(X, x_f) \rightarrow \pi_1(X, x_g)\}. \quad (4.8)$$

Eigentlich hängt \mathcal{H}_{fg} noch von x_f und x_g ab, aber um die Notation zu vereinfachen, schreiben wir nur \mathcal{H}_{fg} statt $\mathcal{H}_{fg}(x_f, x_g)$. \mathcal{H}_{fg} enthält also alle Homöomorphismen $h \in \mathcal{H}(X)$, für die folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc}\pi_1(X, x_f) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(X, x_f) \\ h_* \downarrow & & \downarrow h_* \\ \pi_1(X, x_g) & \xrightarrow{g_*} & \pi_1(X, x_g)\end{array}$$

⁵Es wird sich zeigen, dass die Voraussetzung „hinreichend zusammenhängend“, die die Existenz einer universellen Überlagerung $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ garantiert, hinreichend für die Stetigkeit von Pullback-Operatoren ist.

Um die Existenz basierter Systeme von Überlagerungen mit \mathcal{H}_{fg} wie in (4.8) nachzuweisen, benötigen wir das folgende Lemma.

4.2.12 Lemma:

Seien $x_0, x_1 \in X$. Dann besitzt jede Abbildung $f \in \mathcal{C}(X, x_0, x_1)$ eine Umgebung $W(f)$ in $(\mathcal{C}(X, x_0, x_1), \mathcal{T}_{CO})$, so dass $g_* = f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1)$ für alle $g \in W(f)$ gilt.

Beweis:

Da X hinreichend zusammenhängend ist, existiert die universelle Überlagerung $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$. Aufgrund der Stetigkeit von f und der (lokalen) Kompaktheit von X finden wir zu jedem $x \in X$ eine relativ kompakte offene Umgebung V_x , so dass $f(\text{cl}(V_x))$ ganz in einer von π gleichmäßig überlagerten Umgebung $U_{f(x)}$ von $f(x)$ liegt. Die offene Überdeckung $\{V_x\}_{x \in X}$ besitzt eine endliche Teilüberdeckung $\{V_{x_i}\}_{i=1}^n$. Wir setzen $K_i := \text{cl}(V_{x_i})$ und $U_i := U_{f(x_i)}$ für $i = 1, \dots, n$. Dann wird durch

$$W := \bigcap_{i=1}^n [K_i, U_i]$$

offensichtlich eine offene Umgebung von f definiert. Sei $g \in W$ beliebig gewählt und $\alpha : I \rightarrow X$ ein geschlossener Weg mit Basispunkt x_0 . Wir zeigen nun, dass die Wege $f \circ \alpha$ und $g \circ \alpha$ homotop relativ x_1 sind. Daraus folgt $f_*([\alpha]) = g_*([\alpha])$, womit die Aussage bewiesen ist.

Für jedes $i = 1, \dots, n$ ist $\alpha^{-1}(\text{int}(K_i))$ offen in $[0, 1]$ und zerfällt damit in offene Zusammenhangskomponenten, d. h. in offene disjunkte Teilintervalle I_{ij} von $[0, 1]$, $j \in J_i$. Die Menge $\mathcal{I} := \{I_{ij} \mid i = 1, \dots, n, j \in J_i\}$ ist offensichtlich eine offene Überdeckung von $[0, 1]$. Wir wählen eine endliche Teilüberdeckung $\{I^{(1)}, \dots, I^{(m)}\} \subset \mathcal{I}$ aus. Die $I^{(i)}$ seien so angeordnet, dass $\inf I^{(i-1)} \leq \inf I^{(i)}$ für $i = 2, \dots, m$. Dann finden wir eine Partition $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 1$, so dass $t_i \in I^{(i-1)} \cap I^{(i)}$ für $i = 1, \dots, m$ gilt. Außerdem finden wir nach Konstruktion zu jedem $i = 1, \dots, m$ ein $j(i) \in \{1, \dots, n\}$ mit $\alpha([t_{i-1}, t_i]) \subset \text{int}(K_{j(i)})$. Wegen $f(K_{j(i)}) \subset U_{j(i)}$ und $g(K_{j(i)}) \subset U_{j(i)}$ gilt dann

$$f \circ \alpha([t_{i-1}, t_i]) \subset U_{j(i)} \quad \text{und} \quad g \circ \alpha([t_{i-1}, t_i]) \subset U_{j(i)} \quad \text{für } i = 1, \dots, m.$$

Wählen wir einen beliebigen Punkt $\tilde{x}_0 \in \pi^{-1}(x_0)$, so können wir also die Wege $f \circ \alpha$ und $g \circ \alpha$ entlang der Kette $U_{j(1)}, \dots, U_{j(m)}$ zu Wegen $\alpha_f, \alpha_g : I \rightarrow \tilde{X}$ mit Anfangspunkt \tilde{x}_0 liften. Dann müssen die Liftungen aber auch die gleichen Endpunkte $\alpha_f(1) = \alpha_g(1)$ haben, da diese im gleichen Blatt über $U_{j(m)}$ liegen. Da \tilde{X} einfach zusammenhängend ist, sind die gelifteten Wege homotop relativ der Endpunkte mittels einer Homotopie \tilde{H} . Dann ist offensichtlich $H := \pi \circ \tilde{H}$ eine Homotopie von $f \circ \alpha$ nach $g \circ \alpha$ relativ x_0 , womit die Aussage bewiesen ist. \square

4.2.13 Satz und Definition:

Es sei $F : X \rightarrow X$ eine Überlagerung mit Fixpunkt x_F . Dann existiert genau ein maximales basiertes System $\mathcal{K}(F, x_F) = (\mathcal{L}, \Phi, \psi)$ von Überlagerungen (mit

Fixpunkten), so dass $F \in \mathcal{L}$ und \mathcal{H}_{fg} wie in (4.8) definiert ist.⁶ Dieses heißt das **von (F, x_F) erzeugte kombinatorisch äquivalente Funktionensystem**. Überlagerungen F und G mit Fixpunkten x_F und x_G heißen **kombinatorisch äquivalent**, falls $\mathcal{K}(F, x_F) = \mathcal{K}(G, x_G)$.

Beweis:

(1) *Definition von \mathcal{L} :*

$$\mathcal{L} := \{f \in \mathcal{C}(X) \mid f \text{ Überlagerung mit Fixpunkt } x_f \text{ und } \mathcal{H}_{fF} \neq \emptyset\}.$$

Dann gilt $\mathcal{H}_{fg} \neq \emptyset$ für beliebige $f, g \in \mathcal{L}$, denn es gilt stets $h_1 \circ h_2 \in \mathcal{H}_{fg}$, falls $h_2 \in \mathcal{H}_{fF} \neq \emptyset$ und $h_1 \in \mathcal{H}_{gF}^{-1} \neq \emptyset$. Aus $h_{2*}f_* = F_*h_{2*} : \pi_1(X, x_f) \rightarrow \pi_1(X, x_F)$ und $h_{1*}^{-1}g_* = F_*h_{1*}^{-1} : \pi_1(X, x_g) \rightarrow \pi_1(X, x_F)$ folgt nämlich

$$h_{1*}h_{2*}f_* = h_{1*}F_*h_{2*} = g_*h_{1*}h_{2*} : \pi_1(X, x_f) \rightarrow \pi_1(X, x_g).$$

(2) *Definition von Φ_{fg} :* Aus $h_*f_* = g_*h_*$ folgt $h_*f_*\pi_1(X, x_f) = g_*\pi_1(X, x_g)$.

Also existiert nach dem Liftungstheorem und dem Eindeutigkeitssatz für Liftungen zu jedem $h \in \mathcal{H}_{fg}$ ein eindeutig bestimmter Homöomorphismus $\tilde{h} \in \mathcal{H}(X)$ mit $h \circ f = g \circ \tilde{h}$ und $\tilde{h}(x_f) = x_g$. Wir können daher $\Phi_{fg}(h) := \tilde{h}$ setzen. Dass $\Phi_{fg}(h) \in \mathcal{H}_{fg}$ gilt, sieht man wie folgt: Aus $h \circ f = g \circ \tilde{h}$ folgt $g_*h_* = h_*f_* = g_*h_* : \pi_1(X, x_f) \rightarrow \pi_1(X, x_g)$. Da g eine Überlagerung ist, ist g_* injektiv. Also gilt $\tilde{h}_* = h_*$ und damit $\tilde{h}_*f_* = g_*\tilde{h}_*$. Es folgt $\Phi_{fg}(\mathcal{H}_{fg}) \subset \mathcal{H}_{fg}$.

(3) *Nachweis der Axiome [P1] und [P2]:*

[P1] Offensichtlich gilt $h_*f_* = g_*h_*$ genau dann, wenn $(h^{-1})_*g_* = h_*^{-1}g_* = f_*h_*^{-1} = f_*(h^{-1})_*$. Also gilt $\mathcal{H}_{fg} = \mathcal{H}_{gf}^{-1}$. Aus $h \circ f = g \circ \Phi_{fg}(h)$ und $h^{-1} \circ g = f \circ \Phi_{gf}(h^{-1})$ folgt

$$h^{-1} \circ h \circ f = h^{-1} \circ g \circ \Phi_{fg}(h) = f \circ \Phi_{gf}(h^{-1}) \circ \Phi_{fg}(h).$$

Andererseits gilt natürlich $\text{id}_X \circ f = f \circ \text{id}_X$. Da zudem nach Voraussetzung $\Phi_{gf}(h^{-1}) \circ \Phi_{fg}(h)(x_f) = x_f$ gilt, folgt aus dem Eindeutigkeitssatz für Liftungen $\Phi_{gf}(h^{-1}) = \Phi_{fg}(h)^{-1}$.

[P2] Aus $h_1 \in \mathcal{H}_{f_1f_2}$ und $h_2 \in \mathcal{H}_{f_2f_3}$ folgt

$$(h_2 \circ h_1)_* \circ f_{1*} = h_{2*}f_{2*}h_{1*} = f_{3*}h_{2*}h_{1*} = f_{3*} \circ (h_2 \circ h_1)_*.$$

Also gilt $\mathcal{H}_{f_2f_3} \circ \mathcal{H}_{f_1f_2} \subset \mathcal{H}_{f_1f_3}$. Umgekehrt lässt sich jeder Homöomorphismus $h \in \mathcal{H}_{f_1f_3}$ schreiben als $h = h_2 \circ h_1$ mit $h_1 \in \mathcal{H}_{f_1f_2}$ und $h_2 \in \mathcal{H}_{f_2f_3}$. Dabei kann h_1 beliebig gewählt und $h_2 := h \circ h_1^{-1}$ gesetzt werden. Weiter gilt

$$h_2 \circ h_1 \circ f_1 = f_3 \circ \Phi_{f_2f_3}(h_2) \circ \Phi_{f_1f_2}(h_1) = f_3 \circ \Phi_{f_1f_3}(h_2 \circ h_1).$$

Aus dem Eindeutigkeitssatz für Liftungen folgt wieder

$$\Phi_{f_1f_3}(h_2 \circ h_1) = \Phi_{f_2f_3}(h_2) \circ \Phi_{f_1f_2}(h_1).$$

⁶Dabei ist $\psi_{fg} : \{x_f\} \rightarrow \{x_g\}$, $x_f \mapsto x_g$.

- (4) *Abgeschlossenheit von \mathcal{H}_{fg} :* Es reicht nach Satz 4.1.4 (b) die Abgeschlossenheit von \mathcal{H}_{FF} zu zeigen. Dazu weisen wir die Offenheit des Komplements $\mathcal{H}(X) \setminus \mathcal{H}_{FF}$ in $\mathcal{H}(X)$ nach. Ist h ein Element dieses Komplements, so gilt entweder $h(x_F) \neq x_F$ oder $h(x_F) = x_F$ aber $h_*F_* \neq F_*h_* : \pi_1(X, x_F) \rightarrow \pi_1(X, x_F)$. Im ersten Fall gibt es trivialerweise eine Umgebung von h , die ganz im Komplement von \mathcal{H}_{FF} liegt: Da X ein Hausdorffraum ist, können wir eine offene Umgebung U von $h(x_F)$ finden, die x_F nicht enthält. Dann ist $[x_F, U]$ eine solche Umgebung. Wir können nun also $h(x_F) = x_F$ und $h_*F_* \neq F_*h_*$ annehmen. Nach Lemma 4.2.12 finden wir eine Umgebung $W(h)$ in $\mathcal{H}(X, x_F, x_F)$ mit $k_* = h_* : \pi_1(X, x_F) \rightarrow \pi_1(X, x_F)$ für alle $k \in W(h)$. Damit liegt $W(h)$ ganz im Komplement von \mathcal{H}_{FF} . Wir können $W(h)$ natürlich leicht zu einer Umgebung von h in $\mathcal{H}(X)$ ausbauen, die ebenfalls ganz im Komplement von \mathcal{H}_{FF} liegt. Damit ist klar, dass \mathcal{H}_{FF} abgeschlossen in $\mathcal{H}(X)$ ist.
- (5) *Stetigkeit von Φ_{fg} :* Nach Satz A.1.16 reicht es zu zeigen, dass die Urbilder aller Elemente einer Subbasis offen sind. Nach Satz 2.1.2 bilden die Elemente $[K, U]$ mit kompaktem $K \subset X$ und U Element einer Subbasis der Topologie von X eine derartige Subbasis von $\mathcal{T}_{CO}(\mathcal{H}_{fg})$. Eine Subbasis (sogar eine Basis) von X bilden nach Satz A.2.16 die Blätter von g . Um die Stetigkeit von Φ_{fg} nachzuweisen, reicht es also, folgendes zu zeigen:

Ist $K \subset X$ kompakt und U ein Blatt von g , so ist $\Phi_{fg}^{-1}([K, U])$ offen.

Es sei $h_0 \in \Phi_{fg}^{-1}([K, U])$ beliebig gewählt. Wir müssen zeigen, dass dann eine ganze Umgebung von h_0 nach $[K, U]$ abgebildet wird. Zunächst wählen wir zu jedem Punkt $x \in X$ eine Umgebung $U_{h_0(x)}$ von $h_0(x)$, die von g gleichmäßig überlagert wird. Dann finden wir wegen der Stetigkeit von h_0 eine kompakte Umgebung K_x von x mit $K_x = \text{cl}(\text{int}(K_x))$, die nach $U_{h_0(x)}$ abgebildet wird. Aus der Überdeckung $\{K_x\}_{x \in X}$ wählen wir eine endliche Teilüberdeckung K_{x_1}, \dots, K_{x_n} aus und setzen

$$W := [g(K), g(U)] \cap \bigcap_{i=1}^n [K_{x_i}, U_{h_0(x_i)}].$$

Dann ist W eine Umgebung von h_0 .⁷ Seien nun $h \in W$ und $x \in K$ beliebig gewählt. Sei α ein fest gewählter Weg von x_F nach x . Dann finden wir wie im Beweis von Lemma 4.2.12 eine endliche Kette K_1, \dots, K_m von kompakten Umgebungen aus $\{g(K)\} \cup \{K_{x_i}\}_{i=1}^n$, die den Weg $f \circ \alpha(I)$ überdecken. Dabei kann $K_m = g(K)$ angenommen werden. Folglich werden die Wege $\beta := h \circ f \circ \alpha$ und $\beta_0 := h_0 \circ f \circ \alpha$ von der gleichen Kette U_1, \dots, U_m von gleichmäßig überlagerten Umgebungen von g überdeckt. Dabei ist $U_m = g(U)$. Liften wir β und β_0 entlang dieser Kette zum Anfangspunkt x_g , so liegen die Endpunkte der Liftungen also in U . Damit ist gezeigt, dass $\Phi_{fg}(h)(x) \in U$ gilt. Da $x \in K$ beliebig gewählt war, folgt

⁷Beachte: $g(K)$ ist kompakt, da g stetig und $g(U)$ offen ist.

$\Phi_{fg}(h)(K) \subset U$, also $\Phi_{fg}(h) \in [K, U]$. Damit ist die Stetigkeit von Φ_{fg} bewiesen.

- (6) *Eindeutigkeit und Maximalität:* Da \mathcal{L} bereits alle Überlagerungen f mit Fixpunkt x_f enthält, für die $\mathcal{H}_{fF} \neq \emptyset$ gilt, ist \mathcal{L} (in diesem Sinne) maximal. Die Eindeutigkeit von (\mathcal{L}, Φ) ist klar für \mathcal{L} . Für Φ folgt sie aus dem Eindeutigkeitssatz für Liftungen. Damit ist alles gezeigt. \square

4.2.14 Satz und Definition (Dynamik des Pullback-Operators):

Es seien $f, g : X \rightarrow X$ kombinatorisch äquivalente Überlagerungen im Sinne von Satz 4.2.13. Sei ferner

$$\Gamma(f, g) := \{\varphi \in \text{Iso}(\pi_1(X, x_f), \pi_1(X, x_g)) \mid \varphi f_* = g_* \varphi\}.$$

Dann zerfällt \mathcal{H}_{fg} in die disjunkten, abgeschlossenen und vorwärtsinvarianten Mengen

$$\mathcal{H}_{fg}^\varphi := \{h \in \mathcal{H}_{fg} \mid h_* = \varphi\}, \quad \varphi \in \Gamma(f, g).$$

Ferner existiert für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ und $\varphi \in \Gamma(f, g)$ eine Bijektion $\sigma_n : f^{-n}(x_f) \rightarrow g^{-n}(x_g)$, so dass $h|_{f^{-n}(x_f)} = \sigma_n$ für alle $h \in \Phi_{fg}^n(\mathcal{H}_{fg}^\varphi)$ gilt. Ist zudem X metrisierbar und sind f und g bzgl. geeigneter gewählter Metriken expandierend, so hat jede der Einschränkungen $\Phi_{fg}|_{\mathcal{H}_{fg}^\varphi}$, $\varphi \in \Gamma(f, g)$, höchstens einen Fixpunkt.

Beweis:

Dass die Mengen \mathcal{H}_{fg}^φ eine disjunkte Zerlegung von \mathcal{H}_{fg} bilden, ist offensichtlich. Auch die Abgeschlossenheit ist nach Lemma 4.2.12 klar. Sei nun $h \in \mathcal{H}_{fg}^\varphi$ beliebig gewählt und $\tilde{h} = \Phi_{fg}(h)$. Dann folgt $g_* h_* = h_* f_* = g_* \tilde{h}_*$ und aufgrund der Injektivität von g_* damit $\tilde{h}_* = h_* = \varphi$. Also gilt $\Phi_{fg}(\mathcal{H}_{fg}^\varphi) \subset \mathcal{H}_{fg}^\varphi$.

Seien nun $n \in \mathbb{N}_0$, $h_1, h_2 \in \mathcal{H}_{fg}^\varphi$ und $x \in f^{-n}(x_f)$ beliebig gewählt. Sei ferner $\tilde{h}_j = \Phi_{fg}^n(h_j)$ ($j = 1, 2$). Wir müssen zeigen, dass $\tilde{h}_1(x) = \tilde{h}_2(x)$ gilt. Nach (4.4) gilt $h_j \circ f^n = g^n \circ \tilde{h}_j$ für $j = 1, 2$. Damit folgt bereits

$$\tilde{h}_j(x) \in g^{-n}(h_j(f^n(x))) = g^{-n}(h_j(x_f)) = g^{-n}(x_g).$$

Außerdem ist \tilde{h}_j die eindeutig bestimmte Liftung von $h \circ f^n$ bzgl. g^n , so dass $\tilde{h}_j(x_f) = x_g$. Daraus folgt: Ist α_x ein beliebiger Weg von x_f nach x und β_j die Liftung des Weges $h_j \circ f^n \circ \alpha_x$ zum Anfangspunkt x_g , so ist $\tilde{h}_j(x) = \beta_j(1)$. Nun sind wegen

$$h_j \circ f^n \circ \alpha_x(0) = h_j(x_f) = x_g = h_j(x_f) = h_j(f^n(x)) = h_j \circ f^n \circ \alpha_x(1)$$

die Wege $h_j \circ f^n \circ \alpha_x$ ($j = 1, 2$) geschlossen. Da nach Voraussetzung $h_{1*} = h_{2*} = \varphi$ gilt, sind diese Wege sogar homotop. Nach dem Hauptlemma der Überlagerungstheorie (Satz A.2.20) gilt daher $\tilde{h}_1(x) = \beta_1(1) = \beta_2(1) = \tilde{h}_2(x)$. Expandieren f und g bzgl. geeigneter gewählter Metriken, so sind f und g nach Satz 3.4.22 topologisch exakt, da X zusammenhängend ist. Also liegen die Rückwärtsorbits von x_f und x_g dicht in X . Für jeden Fixpunkt h^* von $\Phi_{fg}|_{\mathcal{H}_{fg}^\varphi}$

gilt $h^* \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Phi_{fg}^n(\mathcal{H}_{fg}^\varphi)$ ($\varphi \in \Gamma(f, g)$ beliebig). Nach dem bisher Gezeigten ist h^* damit auf der in X dichten Teilmenge $O_f^-(x_f)$ eindeutig bestimmt. Also kann es höchstens ein solches h^* geben. \square

Wie bereits bei den stückweise monotonen Intervallabbildungen wollen wir nun eine alternative Konstruktion angeben, bei der die Überlagerungen ebenfalls durch Homöomorphismen „modelliert“ werden. Statt eines basierten Systems von Überlagerungen des kompakten Raumes X erhalten wir ein „freies“ System von Homöomorphismen des universellen Überlagerungsraumes \tilde{X} :

4.2.15 Satz und Definition:

Sei $F : X \rightarrow X$ eine Überlagerung und $\tilde{F} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ eine fest gewählte Liftung von F . Dann existiert ein kombinatorisch äquivalentes System $\mathcal{K}(F, \tilde{F}) = (\tilde{\mathcal{L}}, \tilde{\Phi})$ auf \tilde{X} mit $\tilde{F} \in \tilde{\mathcal{L}}$, so dass gilt:

- (a) Eine Liftung \tilde{f} einer Überlagerung $f : X \rightarrow X$ ist genau dann in $\tilde{\mathcal{L}}$ enthalten, wenn es einen Homöomorphismus $\alpha \in \mathcal{H}(X)$ mit einer Liftung $\tilde{\alpha} \in \mathcal{H}_L(\tilde{X})$ gibt, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} D(\pi) & \xrightarrow{\tilde{f}^*} & D(\pi) \\ \tilde{\alpha}^* \downarrow & & \downarrow \tilde{\alpha}^* \\ D(\pi) & \xrightarrow{\tilde{F}^*} & D(\pi) \end{array}$$

- (b) Ist f eine zu F (frei) homotope Überlagerung, so existiert eine Liftung \tilde{f} von f mit $\tilde{f} \in \tilde{\mathcal{L}}$.

$\mathcal{K}(F, \tilde{F})$ heißt das **von (F, \tilde{F}) erzeugte kombinatorisch äquivalente Funktionensystem**. Zwei Überlagerungen F und G mit Liftungen \tilde{F} und \tilde{G} heißen **kombinatorisch äquivalent**, falls $\mathcal{K}(F, \tilde{F}) = \mathcal{K}(G, \tilde{G})$.

Beweis:

- (a) Nach Satz 3.1.8 (d) ist jede Liftung einer Überlagerung ein Homöomorphismus und umgekehrt ist $\mathcal{H}_L(\tilde{X})$ genau die Menge aller Liftungen von Überlagerungsabbildungen auf X . Der Rest folgt mit Satz 4.2.1.
- (b) Zu zeigen ist, dass jede zu F homotope Abbildung f eine Liftung in $\tilde{\mathcal{L}}$ besitzt: Sei $H : [0, 1] \times X \rightarrow X$ eine Homotopie mit $H(0, x) \equiv F(x)$ und $H(1, x) \equiv f(x)$. Sei $x_0 \in X$ beliebig gewählt und $\gamma : I \rightarrow X$ der durch $\gamma(t) := H(t, x_0)$ definierte Weg von $F(x_0)$ nach $f(x_0)$. Nach Satz A.2.12 gilt dann

$$F_* = \gamma_+ f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, f(x_0)), \quad (4.9)$$

wobei γ_+ den durch

$$\gamma_+ : \pi_1(X, f(x_0)) \rightarrow \pi_1(X, F(x_0)), \quad \gamma_+([\alpha]) = [\gamma \alpha \gamma^{-1}]$$

definierten Gruppenisomorphismus bezeichnet. Nun wählen wir einen Punkt $\tilde{x}_0 \in \pi_1^{-1}(x_0)$ und setzen $\tilde{x}_1 := \tilde{F}(\tilde{x}_0)$. Wir liften den Weg γ

zu einem Weg $\tilde{\gamma} : I \rightarrow \tilde{X}$, der bei \tilde{x}_1 startet und definieren $\tilde{f} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ als diejenige Liftung von f , die \tilde{x}_0 auf $\tilde{\gamma}(1)$ abbildet. Nun wollen wir zeigen, dass $\tilde{f}^* = \tilde{F}^*$ gilt. Aus Satz 3.2.2 und Formel (4.9) ergibt sich

$$\Pi_{f(x_0)} \circ \gamma_+^{-1} \circ \Pi_{F(x_0)}^{-1} \circ \tilde{F}^* = \tilde{f}^*.$$

Es ist also zu zeigen, dass $\Pi_{f(x_0)} \circ \gamma_+^{-1} \circ \Pi_{F(x_0)}^{-1}$ die Identität auf $D(\pi)$ ist. Sei dazu $\beta \in D(\pi)$ beliebig gewählt. Dann ist $\Pi_{F(x_0)}^{-1}(\beta) = [\alpha] \in \pi_1(X, F(x_0))$, so dass die Liftung $\tilde{\alpha}$ von α zum Anfangspunkt $\tilde{F}(\tilde{x}_0)$ den Endpunkt $\tilde{\alpha}(1) = \beta(\tilde{F}(\tilde{x}_0))$ hat. Ferner ist $\gamma_+^{-1}([\alpha]) = [\gamma^{-1}\alpha\gamma]$ und $\beta' := \Pi_{f(x_0)}([\gamma^{-1}\alpha\gamma])$ ist diejenige Decktransformation, die den Punkt $\tilde{f}(\tilde{x}_0)$ auf den Endpunkt der Liftung von $\gamma^{-1}\alpha\gamma$ zum Anfangspunkt $\tilde{f}(\tilde{x}_0)$ abbildet. Dieser Endpunkt ist zugleich der Endpunkt der Liftung von γ zum Anfangspunkt $\tilde{\alpha}(1) = \beta(\tilde{F}(\tilde{x}_0))$. Diese Liftung werde mit $\tilde{\gamma}'$ bezeichnet. Dann ist klar, dass $\beta \circ \tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}'$ und $\beta' \circ \tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}'$ gilt. Damit folgt $\beta = \beta'$, also $\tilde{F}^* = \tilde{f}^*$, da β beliebig gewählt war. Dies impliziert $\tilde{f} \in \tilde{\mathcal{L}}$. \square

Ist X ein triangulierbarer Raum, so besitzt nach Satz 2.1.4 jede stetige Abbildung $f : X \rightarrow X$ eine Umgebung W in der kompakt-offenen Topologie, so dass alle $g \in W$ zu f homotop sind. Damit folgt:

4.2.16 Korollar:

Ist X ein triangulierbarer Raum (z. B. eine kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit), so gilt: Zwei Überlagerungen $f, g : X \rightarrow X$, die in der kompakt-offenen Topologie hinreichend nahe beieinander liegen, sind kombinatorisch äquivalent.

Abschließend wollen wir nun die in 4.2.15 und 4.2.13 definierten Äquivalenzbegriffe zueinander in Beziehung setzen.

4.2.17 Korollar (Zusammenhang der Äquivalenzbegriffe):

Seien $f, g : X \rightarrow X$ Überlagerungen mit Fixpunkten $x_f, x_g \in X$ und $\mathcal{K}(f, x_f) = \mathcal{K}(g, x_g)$. Dann existieren Liftungen $\tilde{f}, \tilde{g} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ mit $\mathcal{K}(f, \tilde{f}) = \mathcal{K}(g, \tilde{g})$. Genauer: Für jedes $\varphi \in \Gamma(f, g)$ mit $\mathcal{H}_{fg}^\varphi \neq \emptyset$ existieren Liftungen $\tilde{f}, \tilde{g} \in \tilde{X}$ und eine abgeschlossene, unter $\tilde{\Phi}_{\tilde{f}\tilde{g}}$ vorwärtsinvariante Menge $\tilde{\mathcal{H}}^\varphi \subset \tilde{\mathcal{H}}_{\tilde{f}\tilde{g}}$, so dass folgendes Diagramm von Operatoren kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathcal{H}}^\varphi & \xrightarrow{\tilde{\Phi}_{\tilde{f}\tilde{g}}} & \tilde{\mathcal{H}}^\varphi \\ \Pr \downarrow & & \downarrow \Pr \\ \mathcal{H}_{fg}^\varphi & \xrightarrow{\Phi_{fg}} & \mathcal{H}_{fg}^\varphi \end{array}$$

Beweis:

Sei $\varphi \in \Gamma(f, g)$ mit \mathcal{H}_{fg}^φ beliebig gewählt. Seien ferner \tilde{x}_f, \tilde{x}_g beliebige Punkte über x_f bzw. x_g (d. h. $\pi(\tilde{x}_f) = x_f, \pi(\tilde{x}_g) = x_g$). Dann existieren eindeutig bestimmte Liftungen $\tilde{f}, \tilde{g} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ von f , so dass $\tilde{f}(\tilde{x}_f) = \tilde{x}_f$ und $\tilde{g}(\tilde{x}_g) = \tilde{x}_g$

gilt. Nach Satz 3.2.2 existiert für $F = f, g$ ein kommutatives Diagramm der Form

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_F) & \xrightarrow{F_*} & \pi_1(X, x_F) \\ \Pi_{x_F} \downarrow & & \downarrow \Pi_{x_F} \\ D(\pi) & \xrightarrow[\tilde{F}^*]{} & D(\pi) \end{array}$$

mit einem Isomorphismus Π_{x_F} . Sei $\alpha \in \mathcal{H}_{fg}^\varphi$. Dann kommutiert auch folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_f) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(X, x_f) \\ \alpha_* \downarrow & & \downarrow \alpha_* \\ \pi_1(X, x_g) & \xrightarrow[g_*]{} & \pi_1(X, x_g) \end{array}$$

Wir liften α zu einem Homöomorphismus $\tilde{\alpha} \in \mathcal{H}_L(\tilde{X})$ mit $\tilde{\alpha}(\tilde{x}_f) = \tilde{x}_g$. Wie-
derum nach Satz 3.2.2 existiert ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_f) & \xrightarrow{\alpha_*} & \pi_1(X, x_g) \\ \Pi_{x_f} \downarrow & & \downarrow \Pi_{x_g} \\ D(\pi) & \xrightarrow[\tilde{\alpha}^*]{} & D(\pi) \end{array}$$

Insgesamt erhalten wir das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} & & \pi_1(X, x_g) & \xrightarrow{g_*} & \pi_1(X, x_g) \\ & \swarrow \alpha_* & \downarrow & & \downarrow \Pi_{x_g} \\ \pi_1(X, x_f) & \xrightarrow[\Pi_{x_g}]{} & \pi_1(X, x_f) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(X, x_f) \\ \Pi_{x_f} \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \Pi_{x_f} \\ D(\pi) & \xrightarrow[\tilde{g}^*]{} & D(\pi) & \xrightarrow[\tilde{f}^*]{} & D(\pi) \\ & \swarrow \tilde{\alpha}^* & & \searrow \tilde{\alpha}^* & \end{array}$$

Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}^* \tilde{f}^* &= (\Pi_{x_g} \alpha_* \Pi_{x_f}^{-1})(\Pi_{x_f} f_* \Pi_{x_f}^{-1}) = \Pi_{x_g} \alpha_* f_* \Pi_{x_f}^{-1} = \Pi_{x_g} g_* \alpha_* \Pi_{x_f}^{-1} \\ &= (\Pi_{x_g} g_* \Pi_{x_g}^{-1})(\Pi_{x_g} \alpha_* \Pi_{x_f}^{-1}) = \tilde{g}^* \tilde{\alpha}^*. \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass $\mathcal{K}(f, \tilde{f}) = \mathcal{K}(g, \tilde{g})$ gilt. Nun definieren wir

$$\tilde{\mathcal{H}}^\varphi := \left\{ \tilde{h} \in \tilde{\mathcal{H}}_{\tilde{f}\tilde{g}} \mid \tilde{h}(\tilde{x}_f) = \tilde{x}_g \right\}.$$

$\tilde{\mathcal{H}}^\varphi$ ist offensichtlich abgeschlossen in $\tilde{\mathcal{H}}_{\tilde{f}\tilde{g}}$. Ist $\tilde{h} \in \tilde{\mathcal{H}}^\varphi$, so folgt

$$\tilde{\Phi}_{\tilde{f}\tilde{g}}(\tilde{h})(\tilde{x}_f) = \tilde{g}^{-1} \circ \tilde{h} \circ \tilde{f}(\tilde{x}_f) = \tilde{g}^{-1} \circ \tilde{h}(\tilde{x}_f) = \tilde{g}^{-1}(\tilde{x}_g) = \tilde{x}_g.$$

Damit ist auch die Vorwärtsinvarianz gezeigt. Für jedes $\tilde{h} \in \tilde{\mathcal{H}}^\varphi$ ist $h = \text{Pr}(\tilde{h})$ (der durch $h \circ \pi = \pi \circ \tilde{h}$ eindeutig bestimmte Homöomorphismus) ein Element von \mathcal{H}_{fg}^φ , denn es gilt zum einen

$$h(x_f) = h(\pi(\tilde{x}_f)) = \pi(\tilde{h}(\tilde{x}_f)) = \pi(\tilde{x}_g) = x_g,$$

und zum anderen

$$h_* = \Pi_{x_g}^{-1} \circ \tilde{h}^* \circ \Pi_{x_f} = \Pi_{x_g}^{-1} \circ \tilde{\alpha}^* \circ \Pi_{x_f} = \alpha_* = \varphi.$$

Zum Nachweis der Konjugationsidentität $\Phi_{fg} \circ \text{Pr} = \text{Pr} \circ \tilde{\Phi}_{\tilde{f}\tilde{g}}$ sei $\tilde{h} \in \tilde{\mathcal{H}}^\varphi$ beliebig gewählt und $h = \text{Pr}(\tilde{h})$. Sei ferner $H := \text{Pr}(\tilde{\Phi}_{\tilde{f}\tilde{g}}(\tilde{h}))$. Zu zeigen ist, dass $H = \Phi_{fg}(h)$ gilt. Das ist nach dem Eindeutigkeitssatz für Liftungen äquivalent zu $h \circ f = g \circ H$ und $H(x_f) = x_g$. Dass letzteres gilt, haben wir oben bereits festgestellt. Das erste ergibt sich folgendermaßen:

$$\begin{aligned} g \circ H \circ \pi &= g \circ \pi \circ \tilde{\Phi}_{\tilde{f}\tilde{g}}(\tilde{h}) = \pi \circ \tilde{g} \circ \tilde{\Phi}_{\tilde{f}\tilde{g}}(\tilde{h}) \\ &= \pi \circ \tilde{h} \circ \tilde{f} = h \circ \pi \circ \tilde{f} = h \circ f \circ \pi. \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. □

Kapitel 5

Konjugationsresultate

5.1 Nachweis expandierender Abbildungen

Um nachzuweisen, dass eine gegebene Abbildung $f : X \rightarrow X$ eines metrisierbaren Raums X expandierend ist, muss man eine Metrik d finden, so dass die Expansionsbedingung $d(f(x), f(y)) \geq \lambda d(x, y)$ mit $\lambda > 1$ für alle hinreichend nahe benachbarten Punkte $x, y \in X$ erfüllt ist. Dies ist in vielen Fällen keine leichte Aufgabe. Handelt es sich um eine C^1 -Abbildung $f : M \rightarrow M$ auf einer kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit M , so kann man z. B. versuchen, die Bedingung (3.5) aus Satz 3.4.4 an die Ableitung von f zu verifizieren. Aber auch, wenn diese nicht erfüllt ist, kann die Abbildung dennoch expandierend in einer anderen Metrik sein, wenn etwa (3.6) gilt, wenn also Konstanten $C > 0$, $\lambda > 1$ existieren mit

$$\|Df_x^k v\| \geq C\lambda^k \|v\| \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}, x \in M, v \in T_x M.$$

Diese Bedingung ist aber bereits schwerer zu verifizieren, da hier die Ableitungen aller Iterierten von f auftauchen. In diesem Abschnitt soll es darum gehen, ein Kriterium herzuleiten, mit dem man feststellen kann, ob eine C^1 -Abbildung expandierend ist, ohne die Iterierten von f zu kennen. Dazu verallgemeinern wir zunächst die Bedingung (3.6) für C^1 -Abbildungen:

5.1.1 Definition:

Sei M eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit und $f : M \rightarrow M$ eine C^1 -Abbildung. Sei ferner $\Lambda \subset M$ kompakt und vorwärtsinvariant unter f . Dann sagen wir, f erfüllt eine **Expansionsbedingung auf Λ** , falls es Konstanten $C > 0$ und $\lambda > 1$ gibt, so dass

$$\|Df_x^k v\| \geq C\lambda^k \|v\| \quad \text{für alle } x \in \Lambda, k \in \mathbb{N} \text{ und } v \in T_x M. \quad (5.1)$$

5.1.2 Bemerkungen:

- Im Eindimensionalen und in der komplexen Dynamik wird eine Menge Λ wie in obiger Definition meist *hyperbolisch* genannt (siehe z. B. [Mel 92, S. 208] oder [Aul 04]).

- Mit den gleichen Argumenten wie im Beweis von Satz 3.4.4 macht man sich klar, dass eine Abbildung, die eine Expansionsbedingung auf einer kompakten Menge Λ erfüllt, auf einer Umgebung von Λ expandierend bzgl. einer geeignet gewählten Metrik ist.

Bedingung (5.1) können wir auch schreiben als:

$$\inf_{v \neq 0} \frac{\|Df_x^k v\|}{\|v\|} = \inf_{\|v\|=1} \|Df_x^k v\| \geq C\lambda^k \quad \text{für alle } x \in \Lambda, k \in \mathbb{N}.$$

Dies führt zu folgender Definition.

5.1.3 Definition:

Seien V, W normierte n -dimensionale reelle Vektorräume mit Normen $\|\cdot\|_V$ bzw. $\|\cdot\|_W$. Dann definieren wir für jede lineare Abbildung $f : V \rightarrow W$ die **Konorm** von f durch

$$\|f\|^* := \inf_{\|v\|_V=1} \|f(v)\|_W = \inf_{v \neq 0} \frac{\|f(v)\|_W}{\|v\|_V}.$$

5.1.4 Lemma:

Seien V, W, X normierte n -dimensionale reelle Vektorräume. Dann gilt für beliebige lineare Abbildungen $f : V \rightarrow W$ und $g : W \rightarrow X$:

$$\|g \circ f\|^* \geq \|g\|^* \|f\|^*.$$

Ist f ein Isomorphismus, so gilt $\|f\|^* = \|f^{-1}\|^{-1}$, wobei $\|f\|$ die Operatornorm von f bezeichnet.

Der einfache Beweis dieses Lemmas ergibt sich unmittelbar aus der Definition der Konorm, und soll deshalb nicht ausgeführt werden. Als nächstes formulieren wir eine hinreichende Bedingung dafür, dass eine Abbildung eine Expansionsbedingung erfüllt.

5.1.5 Satz (Expansionskriterium):

Sei $f : M \rightarrow M$ eine C^1 -Abbildung auf einer vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeit M , $\Lambda \subset M$ eine kompakte vorwärtsinvariante Menge für f , so dass Df_x für alle $x \in \Lambda$ invertierbar ist. Ferner seien alle Fixpunkte von $f|_\Lambda$ repulsiv, d. h. die Expansionsbedingung (5.1) ist auf $\text{Fix}(f|_\Lambda)$ erfüllt. Weiterhin sei $\mu > 1$ eine Konstante und $\Phi : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ eine stetige Abbildung mit endlich vielen Nullstellen, die alle in den Rückwärtsorbits von Fixpunkten liegen, so dass gilt:

$$\|Df_x\|^* \geq \mu \frac{\Phi(f(x))}{\Phi(x)} \quad \text{für alle } x \in \Lambda \setminus \Phi^{-1}(0). \quad (5.2)$$

Dann erfüllt f eine Expansionsbedingung auf Λ .

Beweis:

Wir zeigen zunächst, dass zu jedem $x \in \Lambda$ ein $k(x) \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $\|Df^{k(x)}\|^* > 1$ gilt. Dabei unterscheiden wir zwei Fälle:

1. Fall: Es gilt $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} f^{-n}(\text{Fix}(f))$, d. h. x liegt im Rückwärtsorbit eines Fixpunktes z . Dann existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $f^{k_0}(x) = z$. Für jedes $k \geq k_0$ gilt gemäß der Kettenregel

$$\|Df_x^k\|^* = \|Df_{f^{k-1}(x)} \cdots Df_x\|^* \geq [\|Df_z\|^*]^{k-k_0} \prod_{i=0}^{k_0-1} \|Df_{f^i(x)}\|^*.$$

Wir setzen $c(x) := \prod_{i=0}^{k_0-1} \|Df_{f^i(x)}\|^*$. Da nach Voraussetzung die Ableitung von f an jeder Stelle von Λ invertierbar ist, ist $c(x) > 0$. Nun gilt nach Voraussetzung auch, dass die Fixpunkte von $f|_{\Lambda}$ repulsiv sind. Es existieren also $C(x) > 0$ und $\lambda(x) > 1$ mit

$$\|Df_x^k\|^* \geq c(x)C(x)\lambda(x)^{k-k_0} \rightarrow \infty \text{ für } k \rightarrow \infty.$$

Damit ist klar, dass ein $k(x) \in \mathbb{N}$ existiert mit $\|Df_x^{k(x)}\|^* > 1$.

2. Fall: Es gilt $x \in \Lambda \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} f^{-n}(\text{Fix}(f))$. Dann ergibt sich für jedes $k \in \mathbb{N}$ wie oben gemäß der Kettenregel und (5.2)

$$\|Df_x^k\|^* \geq \prod_{i=0}^{k-1} \|Df_{f^i(x)}\|^* \geq \mu^k \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\Phi(f^{i+1}(x))}{\Phi(f^i(x))} = \mu^k \frac{\Phi(f^k(x))}{\Phi(x)},$$

denn es gilt $\Phi(f^i(x)) \neq 0$ für $i = 0, \dots, k-1$, da sämtliche Nullstellen von Φ in Rückwärtsorbits von Fixpunkten liegen. Es sei $\Phi^{-1}(0) = \{z_1, \dots, z_r\}$. Nach Voraussetzung konvergiert $f^k(x)$ nicht gegen eine Nullstelle von Φ , da alle Nullstellen in Rückwärtsorbits von repulsiven Fixpunkten liegen. Also finden wir für jeden Punkt z_i eine offene Umgebung U_i , so dass unendlich viele Punkte der Trajektorie $(f^k(x))_{k \in \mathbb{N}}$ außerhalb von U_i liegen. Daher existiert eine Teilfolge $(f^{k_n}(x))_{n \in \mathbb{N}}$, die in $\Lambda \setminus \bigcup_{i=1}^n U_i$ liegt. Folglich gilt

$$M := \inf_{n \in \mathbb{N}} \Phi(f^{k_n}(x)) \geq \min \left\{ \Phi(x) \mid x \in \Lambda \setminus \bigcup_{i=1}^n U_i \right\} > 0.$$

Damit folgt

$$\|Df_x^{k_n}\|^* \geq \mu^{k_n} \frac{\Phi(f^{k_n}(x))}{\Phi(x)} \geq \mu^{k_n} \frac{M}{\Phi(x)} \rightarrow \infty.$$

Folglich existiert ein $k(x) \in \mathbb{N}$ mit $\|Df_x^{k(x)}\|^* > 1$.

Gilt $\min_{x \in \Lambda} \|Df_x\|^* > 1$, so sind wir fertig, da die Behauptung mit den Konstanten $C := 1$ und $\lambda := \min_{x \in \Lambda} \|Df_x\|^*$ erfüllt ist. Andernfalls können wir zu

jedem Punkt $x \in \Lambda$ eine reelle Zahl $c(x) \in (1, \|Df_x^{k(x)}\|^*)$ wählen und folgende Menge definieren:

$$U(x) := \left\{ y \in \Lambda \mid \|Df_y^{k(x)}\|^* > c(x) \right\}.$$

Da $\|Df_{(\cdot)}^{k(x)}\|^* : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist¹, ist $U(x)$ eine offene Umgebung von x in Λ und wir können eine endliche Überdeckung $\{U(x_1), \dots, U(x_m)\}$ von Λ auswählen. Als nächstes definieren wir $N := \max_{i=1, \dots, m} k(x_i)$, $\lambda := [\min_{i=1, \dots, m} c(x_i)]^{1/N}$ und

$$C := \lambda^{-N} \left[\min_{x \in \Lambda} \|Df_x\|^* \right]^N.$$

Dann gilt $\lambda > 1$ und folglich $C < 1$, da $\min_{x \in \Lambda} \|Df_x\|^* \leq 1$.

Um nun zu verifizieren, dass f auf Λ eine Expansionsbedingung erfüllt, wählen wir $x \in \Lambda$ und $k \in \mathbb{N}$ beliebig. Wir setzen $y_1 := x$ und definieren für jedes $j \in \mathbb{N}$ ein $i(j) \in \{1, \dots, m\}$ mit $y_j \in U(x_{i(j)})$, und setzen $y_{j+1} := f^{k(x_{i(j)})}(y_j)$. Dann gibt es ein $r \in \mathbb{N}_0$, das maximal in Bezug auf die Abschätzung $\sum_{j=1}^r k(x_{i(j)}) \leq k$ ist. Wir setzen $s := \sum_{j=1}^r k(x_{i(j)})$ und erhalten damit $k - s < N$, $Nr > k - N$ und $y_{r+1} = f^s(x)$. Dies führt unter Verwendung von Lemma 5.1.4 auf folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} \|Df_x^k\|^* &= \|Df_{f^s(x)}^{k-s} Df_x^s\|^* \geq \left\| \prod_{i=1}^{k-s} Df_{f^{i-1}(y_{r+1})} \right\|^* \left\| \prod_{j=1}^r Df_{y_j}^{k(x_{i(j)})} \right\|^* \\ &\geq \left(\min_{y \in \Lambda} \|Df_y\|^* \right)^{k-s} \left(\min_{i=1, \dots, m} c(x_i) \right)^r \\ &\geq \left(\min_{y \in \Lambda} \|Df_y\|^* \right)^N \left(\min_{i=1, \dots, m} c(x_i) \right)^r \\ &= C \lambda^N \lambda^{Nr} > C \lambda^k. \end{aligned}$$

Damit ist der Beweis vollständig. \square

Fordern wir, dass Φ von Null weg beschränkt sein soll, so können wir auf einige der anderen Voraussetzungen verzichten, insbesondere auf die Stetigkeit von Φ :

5.1.6 Korollar:

Sei $f : M \rightarrow M$ eine C^1 -Abbildung auf einer vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeit M , $\Lambda \subset M$ eine kompakte vorwärtsinvariante Menge für f . Weiterhin sei $\mu > 1$ eine Konstante und $\Phi : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^+$ eine von Null weg beschränkte Abbildung, so dass gilt:

$$\|Df_x\|^* \geq \mu \frac{\Phi(f(x))}{\Phi(x)} \text{ für alle } x \in \Lambda.$$

Dann erfüllt f auf Λ eine Expansionsbedingung.

¹ Beachte, dass die Abbildung $A \mapsto \|A\|^* = \|A^{-1}\|^{-1}$, $\text{Gl}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^+$, stetig ist.

Beweis:

Es reicht zu zeigen, dass unter den gegebenen Voraussetzungen zu jedem $x \in \Lambda$ ein $k(x) \in \mathbb{N}$ existiert mit $\|Df_x^{k(x)}\|^* > 1$. Den Rest zeigt man analog wie im Beweis des Satzes. Sei dazu $x \in \Lambda$ beliebig gewählt. Dann folgt für jedes $k \in \mathbb{N}$:

$$\|Df_x^k\|^* \geq \prod_{i=0}^{k-1} \|Df_{f^i(x)}\|^* \geq \mu^k \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\Phi(f^{i+1}(x))}{\Phi(f^i(x))} = \mu^k \frac{\Phi(f^k(x))}{\Phi(x)} \geq \mu^k \frac{\inf_{z \in \Lambda} \Phi(z)}{\Phi(x)}.$$

Da nach Voraussetzung $\inf_{z \in \Lambda} \Phi(z) > 0$ gilt, folgt damit unmittelbar die Behauptung. \square

Das folgende Beispiel liefert eine Anwendung von Satz 5.1.5.

5.1.7 Beispiel (Hyperbolizität der logistischen Abbildungen):

Es sei $M = \mathbb{R}$ und $f(x) = \alpha x(1-x)$ die logistische Abbildung mit Parameter $\alpha > 4$. Dann ist leicht einzusehen, dass die Menge $\Lambda := \bigcap_{n \geq 1} f^{-n}([0, 1])$ kompakt und f -vorwärtsinvariant ist. Die Fixpunkte von f sind 0 und $\frac{\alpha-1}{\alpha}$ mit $|f'(0)| = \alpha > 4$ und $|f'(\frac{\alpha-1}{\alpha})| = |2 - \alpha| > 2$. Also handelt es sich um repulsive Fixpunkte. Ferner ist $\frac{1}{2}$ die einzige Stelle, an der die Ableitung von f verschwindet, und es gilt $f(\frac{1}{2}) = \frac{\alpha}{4} > 1$, also $\frac{1}{2} \notin \Lambda$. Damit sind die Voraussetzungen des Satzes an f erfüllt. Nun definieren wir $\Phi(x) := [x(1-x)]^{1/2}$, $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Die einzigen Nullstellen von Φ sind 1 und 0, und es gilt $\Phi(x) \geq 0$ für alle $x \in \Lambda \subset [0, 1]$. Wegen $f(1) = 0$ und $f(0) = 0$ sind damit auch die Voraussetzungen an Φ erfüllt. Ferner gilt $\|Df_x\|^* \equiv |f'(x)| \equiv \alpha|1-2x|$ und

$$\frac{\Phi(f(x))}{\Phi(x)} = \left[\frac{\alpha x(1-x)(1-\alpha x(1-x))}{x(1-x)} \right]^{1/2} = \alpha^{1/2} \sqrt{1 - \alpha x(1-x)}.$$

Mit $\mu := \sqrt{\alpha} > 2$ erhält man für alle $x \in [0, 1] \cap f^{-1}([0, 1])$:²

$$\begin{aligned} |f'(x)|^2 &= \alpha^2 |1-2x|^2 = \alpha^2 (1-4x+4x^2) = \alpha^2 (1-4x(1-x)) \\ &= \mu^2 \alpha (1-4x(1-x)) \geq \mu^2 \alpha (1-\alpha x(1-x)) = \left[\mu \frac{\Phi(f(x))}{\Phi(x)} \right]^2. \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass f auf $\Lambda \subset [0, 1] \cap f^{-1}([0, 1])$ eine Expansionsbedingung erfüllt. Es existieren in der Literatur mehrere Beweise für diese Tatsache. Meistens wird jedoch eine Fallunterscheidung für $\alpha \geq 2 + \sqrt{5}$ und $\alpha < 2 + \sqrt{5}$ gemacht, was nach unserer Methode unnötig ist, siehe dazu [Aul 04], [Gln 01], [Kra 99] und [Zel 01]. In [Rob 95] findet man auf den Seiten 33 - 37 einen ähnlichen Beweis wie den unseren, der aber technisch aufwändiger ist und u. a. das Lemma von Schwarz aus der Funktionentheorie verwendet.

Als Konsequenz daraus, dass $f|_{\Lambda}$ expandierend ist, ergibt sich, dass Λ eine Cantormenge (also insbesondere total unzusammenhängend) ist und dass $f|_{\Lambda}$ topologisch konjugiert zum sog. Bernoulli-Shift auf dem Symbolraum $\Sigma_2 = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ ist, was chaotisches Verhalten im Sinne von Devaney impliziert. \diamond

²Beachte, dass für $x \in \{0, 1\}$ zwar $\Phi(x) = 0$ gilt, aber der Bruch $\frac{\Phi(f(x))}{\Phi(x)}$ den endlichen Wert $\sqrt{\alpha}$ annimmt.

Das folgende Beispiel zeigt, dass die Umkehrung von Satz 5.1.5 i. A. falsch ist.

5.1.8 Beispiel:

Sei M der 2-Torus $T^2 = S^1 \times S^1$ mit der von \mathbb{R}^4 induzierten Riemannschen Metrik. In Beispiel 3.4.28 haben wir gesehen, dass der lineare Torusendomorphismus $E_M : T^2 \rightarrow T^2$ genau dann expandierend auf T^2 ist, wenn alle Eigenwerte von M dem Betrage nach größer als 1 sind. Dies ist z. B. für

$$M := \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

erfüllt. Ferner gilt für alle $x \in T^2$ unter Verwendung von Lemma 5.1.4 $\|D(E_M)_x\|^* = \|M\|^* = \|M^{-1}\|^{-1}$. Für die Operatornorm von M^{-1} ergibt sich der Wert $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$ und damit $\|D(E_M)_x\|^* = \frac{2}{\sqrt{2}+1} < 1$. Nehmen wir nun an, $\Phi : T^2 \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ sei eine Funktion, die eine Ungleichung der Form (5.2) erfüllt. Dann existiert eine Konstante $\mu > 1$, so dass gilt:

$$\|M\|^* \geq \mu \frac{\Phi(E_M(x))}{\Phi(x)} \quad \text{für alle } x \in T^2 \setminus \Phi^{-1}(0).$$

Da E_M expandierend ist, existiert nach den Sätzen 3.4.22 und 1.1.10 ein Punkt $z \in T^2$ mit dichtem Orbit. Da die Nullstellen von Φ in den Rückwärtsorbits von Fixpunkten enthalten sind, gilt $\Phi(z) > 0$. Induktiv zeigt man:

$$\Phi(E_M^k(z)) \leq \left(\frac{\|M\|^*}{\mu} \right)^k \Phi(z) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Da aber offensichtlich $\left(\frac{\|M\|^*}{\mu} \right)^k \rightarrow 0$ gilt, müsste Φ aus Stetigkeitsgründen auf $\omega(z, E_M) = T^2$ identisch Null sein. \diamond

Wir wollen nun zeigen, dass im Spezialfall $M = \Lambda = S^1$ auch die Umkehrung von Satz 5.1.5 gilt. Dazu stellen wir zunächst fest, dass für eine differenzierbare Abbildung $f : S^1 \rightarrow S^1$ die Ableitung $Df_x : T_x S^1 \rightarrow T_{f(x)} S^1$ durch eine reelle Zahl $f'(x)$ beschrieben werden kann, so dass gilt:

$$|f'(x)| = \frac{\|Df_x v\|}{\|v\|} \quad \text{für alle } v \in T_x S^1.$$

Damit folgt $\|Df_x\|^* = |f'(x)|$, denn

$$\|Df_x\|^* = \min_{\|v\|=1} \|Df_x v\| = \min_{\|v\|=1} |f'(x)| \|v\| = |f'(x)|.$$

5.1.9 Satz:

Für eine C^2 -Abbildung $f : S^1 \rightarrow S^1$ sind folgende Aussagen äquivalent:

- (a) f erfüllt eine Expansionsbedingung auf S^1 .
- (b) Für ein $\mu > 1$ und eine stetige positive Abbildung $\Phi : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^+$ gilt:

$$|f'(x)| \geq \mu \frac{\Phi(f(x))}{\Phi(x)} \quad \text{für alle } x \in S^1. \quad (5.3)$$

Beweis:

Die Richtung „(b) \Rightarrow (a)“ ergibt sich aus Korollar 5.1.6. Setzen wir (a) voraus, so existieren Konstanten $C > 0$ und $\lambda > 1$, so dass gilt:

$$|(f^k)'(x)| \geq C\lambda^k \quad \text{für alle } x \in S^1, k \in \mathbb{N}.$$

Sei $k_0 \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $C\lambda^{k_0} > 1$, und sei $g := f^{k_0}$. Offensichtlich ist g dann eine C^2 -Abbildung, die eine Bedingung der Form (3.5) erfüllt. Für eine solche Abbildung lässt sich [Kat 95, Theorem 5.1.16, S. 191] anwenden. Danach existiert eine stetige positive Dichtefunktion $\psi : S^1 \rightarrow [c_1, c_2]$ ($c_2 \geq c_1 > 0$), so dass das zugehörige Maß g -invariant ist. Für die Dichte ψ gilt also

$$\psi(x) = \sum_{y \in g^{-1}(x)} \frac{\psi(y)}{|g'(y)|} \quad \text{für alle } x \in S^1. \quad (5.4)$$

Wir definieren nun eine neue Funktion $\varphi : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\varphi(x) := \sum_{i=0}^{k_0-1} \sum_{y \in f^{-i}(x)} \frac{\psi(y)}{|(f^i)'(y)|}.$$

Offensichtlich ist φ stetig und positiv. Der Wertebereich ist also ein kompaktes Intervall $[d_1, d_2]$ mit $d_2 \geq d_1 > 0$. Ferner gilt

$$\begin{aligned} \sum_{y \in f^{-1}(x)} \frac{\varphi(y)}{|f'(y)|} &= \sum_{y \in f^{-1}(x)} \frac{1}{|f'(y)|} \sum_{i=0}^{k_0-1} \sum_{z \in f^{-i}(y)} \frac{\psi(z)}{|(f^i)'(z)|} \\ &= \sum_{i=0}^{k_0-1} \sum_{y \in f^{-1}(x)} \sum_{z \in f^{-i}(y)} \frac{\psi(z)}{|(f^i)'(z)f'(f^i(z))|}. \end{aligned}$$

Mit

$$(f^i)'(z)f'(f^i(z)) = f'(f^i(z)) \prod_{j=0}^{i-1} f'(f^j(z)) = \prod_{j=0}^i f'(f^j(z)) = (f^{i+1})'(z)$$

folgt:

$$\begin{aligned} \sum_{y \in f^{-1}(x)} \frac{\varphi(y)}{|f'(y)|} &= \sum_{i=0}^{k_0-1} \sum_{z \in f^{-(i+1)}(x)} \frac{\psi(z)}{|(f^{i+1})'(z)|} \\ &= \sum_{z \in f^{-k_0}(x)} \frac{\psi(z)}{|(f^{k_0})'(z)|} + \sum_{i=0}^{k_0-2} \sum_{z \in f^{-(i+1)}(x)} \frac{\psi(z)}{|(f^{i+1})'(z)|} \\ &= \sum_{z \in g^{-1}(x)} \frac{\psi(z)}{|g'(z)|} + \sum_{i=1}^{k_0-1} \sum_{z \in f^{-i}(x)} \frac{\psi(z)}{|(f^i)'(z)|} \\ &\stackrel{(5.4)}{=} \psi(x) + \sum_{i=1}^{k_0-1} \sum_{z \in f^{-i}(x)} \frac{\psi(z)}{|(f^i)'(z)|} \\ &= \sum_{i=0}^{k_0-1} \sum_{z \in f^{-i}(x)} \frac{\psi(z)}{|(f^i)'(z)|} = \varphi(x). \end{aligned}$$

Daher gilt für alle $x \in S^1$:

$$\varphi(f(x)) = \sum_{y \in f^{-1}(f(x))} \frac{\varphi(y)}{|f'(y)|} = \frac{\varphi(x)}{|f'(x)|} + \sum_{y \in f^{-1}(f(x)) \setminus \{x\}} \frac{\varphi(y)}{|f'(y)|} > \frac{\varphi(x)}{|f'(x)|}.$$

Die strikte Ungleichung gilt, da φ strikt positiv ist und $f^{-1}(f(x))$ mindestens zwei Elemente enthält. Letzteres sieht man folgendermaßen: Sei $c : [0, 1] \rightarrow S^1$, $c(t) = e^{2\pi i t}$. Nehmen wir an, f wäre ein Homöomorphismus. Dann ist auch $g = f^{k_0}$ ein Homöomorphismus. Die Kurve $g \circ c : [0, 1] \rightarrow S^1$ ist differenzierbar und ihre Länge ist 2π . Damit folgt der Widerspruch

$$2\pi = L(c) = \int_0^1 \|Dg_{c(t)} \dot{c}(t)\| dt \geq C\lambda^{k_0} \int_0^1 \|\dot{c}(t)\| dt = 2\pi C\lambda^{k_0} > 2\pi.$$

Also muss f eine mindestens zweiblättrige Überlagerung sein. Für die stetige Hilfsfunktion h , definiert durch

$$h(x) := \frac{\varphi(f(x))}{\varphi(x)} |f'(x)|, \quad h : S^1 \rightarrow \mathbb{R},$$

gilt deshalb $h > 1$. Setzen wir $\mu := \min_{x \in S^1} h(x) > 1$, so folgt

$$|f'(x)| \geq \mu \frac{\varphi(x)}{\varphi(f(x))} \text{ für alle } x \in S^1.$$

Für $\Phi := \frac{1}{\varphi}$ gilt also (5.2). \square

5.1.10 Korollar:

Sei M eine zusammenhängende kompakte n -dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit und $f : M \rightarrow M$ eine C^2 -Abbildung mit

$$\|Df_x\|^* = |\det Df_x|^{1/n} \quad \text{für alle } x \in M. \quad (5.5)$$

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (a) f erfüllt eine Expansionsbedingung auf M .
- (b) Für ein $\mu > 1$ und eine beschränkte und von Null weg beschränkte Abbildung $\Phi : M \rightarrow \mathbb{R}^+$ gilt:

$$\|Df_x\|^* \geq \mu \frac{\Phi(f(x))}{\Phi(x)} \quad \text{für alle } x \in M.$$

Beweis:

Wie im Beweis von Satz 5.1.9 wählen wir ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so dass $g := f^{k_0}$ eine Bedingung der Form (3.5) erfüllt. Nach [Mel 92, Theorem 2.1, S. 352] besitzt g ein bzgl. des Riemannschen Volumens von M absolutstetiges Wahrscheinlichkeitsmaß, dessen Dichte $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt und von Null weg beschränkt ist. Damit erhält man für eine wie im Beweis von Satz 5.1.9 konstruierte Funktion φ und eine Konstante $\tilde{\mu} > 1$:

$$|\det Df_x| > \tilde{\mu} \frac{\varphi(x)}{\varphi(f(x))} \quad \text{für alle } x \in M.$$

Mit $\Phi := (\frac{1}{\varphi})^{1/n}$ gilt folglich für alle $x \in M$

$$\|Df_x\|^* \stackrel{(5.5)}{=} |\det Df_x|^{1/n} > \tilde{\mu}^{1/n} \frac{\Phi(f(x))}{\Phi(x)},$$

und es gilt offensichtlich $\mu := \tilde{\mu}^{1/n} > 1$. Wie im Fall von S^1 muss man auch im allgemeinen Fall nachweisen, dass f kein Homöomorphismus ist. Dazu wählt man zwei Punkte $p, q \in M$ mit maximalem Abstand zueinander. Ferner wählt man eine kürzeste Geodäte $c : [0, 1] \rightarrow M$ von $f(p)$ nach $f(q)$. Nehmen wir an, f wäre ein Homöomorphismus, so ist f nach dem Umkehrsatz sogar ein Diffeomorphismus, und es folgt der Widerspruch

$$\begin{aligned} d(f(p), f(q)) &= \int_0^1 \left\| \frac{d}{dt} f(f^{-1}(c(t))) \right\| dt = \int_0^1 \|Df_{f^{-1}(c(t))} \frac{d}{dt} f^{-1}(c(t))\| \\ &\geq \lambda L(f^{-1} \circ c) > L(f^{-1} \circ c) \geq d(p, q). \end{aligned}$$

□

5.1.11 Bemerkung:

Aus dem Beweis von Satz 5.1.9 ergibt sich, dass die Funktion φ die Fixpunktgleichung des zu f gehörigen *Frobenius-Perron-Operators* erfüllt, welcher durch

$$(P_f \varphi)(x) := \sum_{y \in f^{-1}(x)} \frac{\varphi(y)}{|f'(y)|}, \quad P_f : L^1 \rightarrow L^1, \quad (5.6)$$

gegeben ist. Mit etwas mehr Aufwand lässt sich zeigen, dass jede nichtnegative integrierbare Funktion φ_0 mit positiver L^1 -Norm unter Iteration von P_f gegen ein Vielfaches von φ konvergiert (siehe z. B. [Las 94], S. 41, 104 und 184). Diese Tatsache kann man verwenden, um nachzuweisen, dass eine Abbildung expandierend ist. Wie das funktioniert, soll das nun folgende Beispiel klar machen.

5.1.12 Beispiel:

Anstatt r -facher Überlagerungen des Einheitskreises können wir genausogut r -modale Intervallabbildungen $f : I \rightarrow I$ betrachten, die sich nach S^1 liften lassen (das sind genau die in Satz 4.2.10 betrachteten). Wir beschränken uns auf unimodale Abbildungen $f : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ mit $f(-1) = f(1) = -1$ und $f(c) = 1$ für ein $c \in (-1, 1)$. Jede solche Abbildung kann auch als zweiblättrige Überlagerung $F : S^1 \rightarrow S^1$ aufgefasst werden, die durch die Gleichung $\operatorname{Re} F(z) = f(\operatorname{Re} z)$ bis auf komplexe Konjugation eindeutig bestimmt ist. Ein Beispiel dazu haben wir bereits im ersten Kapitel gesehen, nämlich die Abbildungen $f(x) = 1 - 2x^2$ und $F(z) = z^2$. Durch Ableiten der Identität $\operatorname{Re} \circ F = f \circ \operatorname{Re}$ erhält man für alle $z \in S^1$:

$$F'(z) \sqrt{1 - f(\operatorname{Re} z)^2} = f'(\operatorname{Re} z) \sqrt{1 - (\operatorname{Re} z)^2}. \quad (5.7)$$

In lokalen Koordinaten ist die Realteil-Abbildung nämlich durch $\varphi \mapsto \cos(\varphi)$ gegeben, hat also die Ableitung $\varphi \mapsto -\sin \varphi = -\sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = -\sqrt{1 - (\operatorname{Re} z)^2}$.

Definieren wir auf $L^1(I)$ den Operator P_f analog zu (5.6) durch

$$(P_f \psi)(x) := \sum_{y \in f^{-1}(x)} \frac{\psi(y)}{|f'(y)|}, \quad P_f : L^1(I) \rightarrow L^1(I),$$

so ergibt sich mit der Abbildung

$$(H\psi)(z) := \psi(\operatorname{Re} z) \sqrt{1 - (\operatorname{Re} z)^2}, \quad H : L^1(I) \rightarrow L^1(S^1),$$

ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} L^1(I) & \xrightarrow{P_f} & L^1(I) \\ H \downarrow & & \downarrow H \\ L^1(S^1) & \xrightarrow{P_F} & L^1(S^1) \end{array}$$

Um dies einzusehen, müssen wir die Gültigkeit folgender Gleichung nachweisen:

$$\sum_{w \in F^{-1}(z)} \left[\frac{\psi(\operatorname{Re} w) \sqrt{1 - (\operatorname{Re} w)^2}}{|F'(w)|} \right] = \left[\sum_{y \in f^{-1}(\operatorname{Re} z)} \frac{\psi(y)}{|f'(y)|} \right] \sqrt{1 - (\operatorname{Re} z)^2}.$$

Diese ergibt sich mit (5.7) folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \sum_{w \in F^{-1}(z)} \left[\frac{\psi(\operatorname{Re} w) \sqrt{1 - (\operatorname{Re} w)^2}}{|F'(w)|} \right] &= \sum_{w \in F^{-1}(z)} \left[\frac{\psi(\operatorname{Re} w) \sqrt{1 - f'(\operatorname{Re} w)^2}}{|f'(\operatorname{Re} w)|} \right] \\ &= \sum_{w \in F^{-1}(z)} \left[\frac{\psi(\operatorname{Re} w) \sqrt{1 - (\operatorname{Re} F(w))^2}}{|f'(\operatorname{Re} w)|} \right] \\ &= \left[\sum_{w \in F^{-1}(z)} \frac{\psi(\operatorname{Re} w)}{|f'(\operatorname{Re} w)|} \right] \sqrt{1 - (\operatorname{Re} z)^2}. \end{aligned}$$

Wenn nun noch die Gleichung

$$\sum_{w \in F^{-1}(z)} \frac{\psi(\operatorname{Re} w)}{|f'(\operatorname{Re} w)|} \equiv \sum_{y \in f^{-1}(\operatorname{Re} z)} \frac{\psi(y)}{|f'(y)|}$$

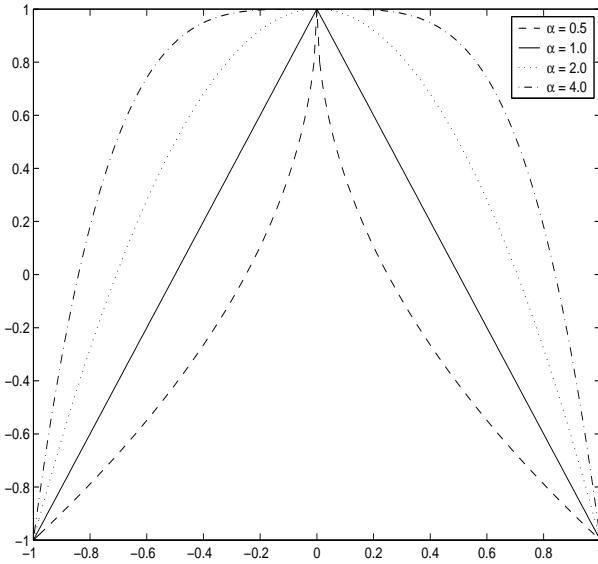
gelten würde, wären wir fertig. Es reicht uns allerdings auch, wenn sie fast überall gilt, da es sich um L^1 -Funktionen handelt. Wir beschränken uns deshalb darauf, die Gleichung für alle $z \in S^1 \setminus \{1\}$ zu verifizieren. Aus $z \neq 1$ folgt $\operatorname{Re} z \neq 1$ und deshalb $\#f^{-1}(\operatorname{Re} z) = 2$. Wir nehmen an, dass $F^{-1}(z) = \{w_1, w_2\}$ und damit $f^{-1}(\operatorname{Re} z) = \operatorname{Re} F^{-1}(z) = \{\operatorname{Re} w_1, \operatorname{Re} w_2\}$. Daraus ergibt sich

$$\sum_{w \in F^{-1}(z)} \frac{\psi(\operatorname{Re} w)}{|f'(\operatorname{Re} w)|} = \frac{\psi(\operatorname{Re} w_1)}{|f'(\operatorname{Re} w_1)|} + \frac{\psi(\operatorname{Re} w_2)}{|f'(\operatorname{Re} w_2)|} = \sum_{y \in f^{-1}(\operatorname{Re} z)} \frac{\psi(y)}{|f'(y)|}.$$

Dies sollte als Rechtfertigung dafür ausreichen, sich auf unimodale Intervallabbildungen zu beschränken. Als konkretes Beispiel wollen wir nun die Familie

$$f_\alpha(x) = 1 - 2|x|^\alpha, \quad \alpha > 0,$$

betrachten. Folgende Grafik zeigt die Graphen von f_α für verschiedene Parameterwerte.

Abbildung 5.1: Der Graph von f_α für $\alpha = 0.5, 1, 2, 4$.

Wir wollen zum einen mit Hilfe von Satz 5.1.9 analytisch beweisen, dass f_α für $\alpha > 1$ expandierend ist (als Überlagerung von S^1), zum anderen wollen wir dies für einige konkrete α -Werte „numerisch beweisen“.³ Die Ableitung von f_α existiert für alle $\alpha > 1$ und ist gegeben durch

$$f'_\alpha(x) = -2\alpha \operatorname{sgn}(x)|x|^{\alpha-1}.$$

Um (5.2) zu verifizieren, setzen wir $\Phi_\alpha(x) := [1 - x^2]^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}$ und $\mu_\alpha := \alpha^{1/\alpha} > 1$. Damit ist Folgendes zu zeigen:

$$2\alpha|x|^{\alpha-1} \geq \alpha^{1/\alpha} \left[\frac{1 - (1 - 2|x|^\alpha)^2}{1 - x^2} \right]^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \quad \text{für alle } \alpha > 1, x \in [-1, 1] \setminus \{\pm 1\}.$$

Dies lässt sich äquivalent zu

$$2^{\alpha/(\alpha-1)-2}\alpha \geq \frac{1 - |x|^\alpha}{1 - x^2}$$

umformen. Da nun die linke Seite der Ungleichung konstant ist, reicht es zu zeigen, dass das Maximum M der rechten Seite kleiner gleich $2^{\alpha/(\alpha-1)-2}\alpha$ ist. Wie man sich leicht klarmacht, wird das Maximum für $\alpha \geq 2$ stets an den Rändern von $[-1, 1]$ angenommen und für $\alpha \in (1, 2)$ bei $x = 0$. Es ergibt sich mit der Regel von L'Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - |x|^\alpha}{1 - x^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\alpha|x|^{\alpha-1}}{2x} = \frac{\alpha}{2}.$$

³Dass f_α auch für $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$ expandierend ist, ergibt sich unmittelbar aus $|f'_\alpha(x)| \equiv 2\alpha|x|^{\alpha-1} > 1$ für alle $x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$.

und damit

$$M = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{für } \alpha \in (1, 2) \\ \frac{\alpha}{2} & \text{für } \alpha \geq 2 \end{array} \right\}.$$

Für $\alpha \geq 2$ müssen wir zeigen, dass $\frac{\alpha}{2} \leq 2^{\alpha/(\alpha-1)-2}\alpha$ gilt. Dies ist äquivalent zu $2^{1/(\alpha-1)} \geq 1$, was wegen $\frac{1}{\alpha-1} > 0$ offensichtlich erfüllt ist. Für $\alpha \in (1, 2)$ ist zu zeigen, dass $1 \leq 2^{\alpha/(\alpha-1)-2}\alpha$ gilt, was unmittelbar aus $\frac{\alpha}{\alpha-1} - 2 = \frac{2-\alpha}{\alpha-1} > 0$ folgt. Nun wollen wir für die Werte $\alpha_1 = \frac{3}{2}$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 4$ und $\alpha_4 = 6$ mit Hilfe des

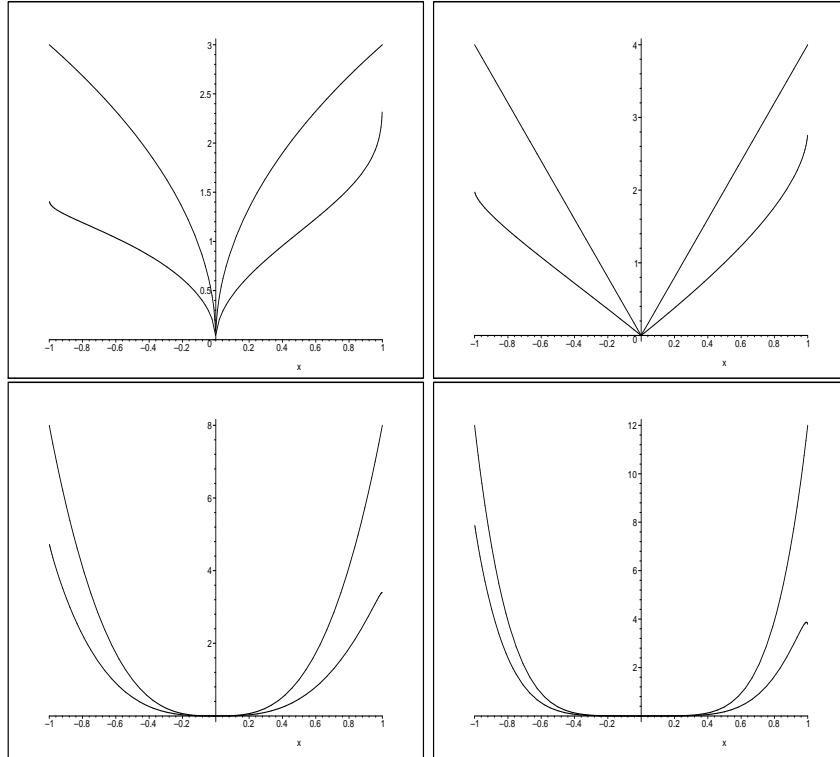


Abbildung 5.2: $|f'_\alpha|$ versus $(P^2 \varphi_0)/(P^2 \varphi_0) \circ f_\alpha$.

Frobenius-Perron-Operators nachweisen, dass die zugehörigen Abbildungen expandierend sind. Die obigen Grafiken stellen jeweils die Ableitung $|f'_{\alpha_i}|$ und den Graphen der Funktion $h_i : x \mapsto (P^2 \varphi_0)(x)/(P^2 \varphi_0)(f_{\alpha_i}(x))$ dar für $\varphi_0(x) \equiv 1$. Der oberhalb verlaufende Graph ist stets der von $|f'_{\alpha_i}|$. Wie man sieht, reichen bereits zwei Iterationen des Frobenius-Perron-Operators aus, um eine Funktion Φ zu finden, die die Funktionalungleichung (5.2) erfüllt (vorausgesetzt man vertraut darauf, dass der Rechner die Funktionsgraphen hinreichend korrekt berechnet und darstellt). \diamond

5.2 Konjugiertheit von Intervallabbildungen

Die topologische Konjugiertheit von Intervallabbildungen ist im Prinzip bereits vollständig verstanden. Die entsprechenden Resultate findet man z. B. in

[Mel 92] oder [Bdw 90]. [Mel 92, Theorem 3.1, S. 95] liefert eine hinreichende Bedingung für die topologische Konjugiertheit zweier r -modaler kombinatorisch äquivalenter Abbildungen mit attraktiven periodischen Orbits. Wir wollen in diesem Abschnitt lediglich anhand eines Beispiels zeigen, wie man eine Konjugation von Intervallabbildungen mit attraktiven Fixpunkten unter Verwendung von Pullback-Operatoren konstruieren kann.

5.2.1 Beispiel:

Wir wollen nachweisen, dass für jedes $\alpha > 4$ die logistische Abbildung $f(x) = \alpha x(1-x)$ auf ganz \mathbb{R} zur Zeltabbildung $g(x) = \frac{3}{2}(1 - |2x - 1|)$ konjugiert ist. \mathbb{R} ist zwar kein kompaktes Intervall, aber wir können die Abbildungen f und g auf $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ durch $f(\pm\infty) = g(\pm\infty) := -\infty$ fortsetzen. Wenn wir $\overline{\mathbb{R}}$ mit der Metrik $\overline{d}(x, y) := |\arctan(x) - \arctan(y)|$ versehen, wobei $\arctan(\pm\infty) = \pm\frac{\pi}{2}$, so ist $(\overline{\mathbb{R}}, \overline{d})$ homöomorph zu einem kompakten Intervall, die Fortsetzungen von f und g sind unimodal auf $\overline{\mathbb{R}}$ und der Punkt $-\infty$ ist ein attraktiver Fixpunkt für f und g . Folgende Grafik stellt die Funktionen f und g in dieser Identifizierung dar.⁴ Wir werden jedoch keinen Gebrauch von dieser Konstruktion machen.

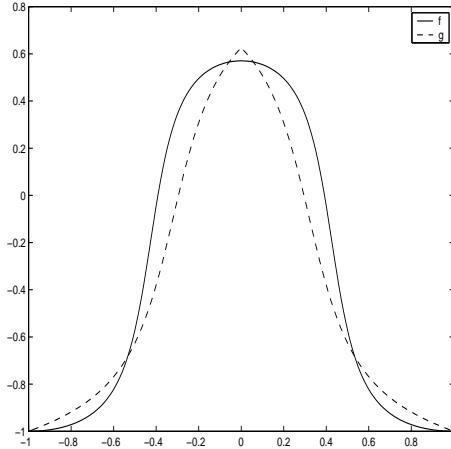


Abbildung 5.3: $f, g : \overline{\mathbb{R}} = [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ für $\alpha = 5$.

Man macht sich leicht klar, dass für $F \in \{f, g\}$ Folgendes gilt:

- (a) $F_1 := F|_{(-\infty, \frac{1}{2})}$ ist streng monoton wachsend und $F_2 := F|_{(\frac{1}{2}, \infty)}$ streng monoton fallend.
- (b) $F((1, \infty)) = (-\infty, 0)$ und $F((-\infty, 0)) = (-\infty, 0)$.
- (c) $F(x) < x$ für alle $x \in (-\infty, 0)$.
- (d) $F(0) = 0$, $F(\frac{1}{2}) > 1$, $F(1) = 0$.
- (e) $F(x) = F(1 - x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Zunächst konstruieren wir eine Konjugation von f nach g auf $(-\infty, 0)$. Wegen

⁴Das soll heißen, es werden die Abbildungen $\sigma \circ F \circ \sigma^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$, $F = f, g$, dargestellt mit $\sigma(x) = \frac{2}{\pi} \arctan(x)$.

(b) ist dies sinnvoll. Wir betrachten zwei Partitionen von $(-\infty, 0)$ in Teilintervalle mittels des Orbits $O_f^+(z_f)$ bzw. $O_g^+(z_g)$ mit $z_f = f^2(\frac{1}{2})$ und $z_g = g^2(\frac{1}{2})$. Wegen (b), (c) und (d) gilt

$$-\infty < \dots < F^2(z_F) < F(z_F) < z_F < 0 \text{ und } F^n(z_F) \rightarrow -\infty.$$

Wir definieren $I_n(F) := [F^{n+1}(z_F), F^n(z_F)]$ für $n \in \mathbb{N}_0$ und $I_{-n}(F) := F_1^{-n}(I_0)$ für $n \in \mathbb{N}$. So erhält man Partitionen $\{I_n(F)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ von $(-\infty, 0)$ (die Intervalle $I_n(F)$ und $I_{n+1}(F)$ schneiden sich jeweils nur in einem Randpunkt). Für $F = g$ können wir diese Partition explizit angeben: $I_n(g) = [-\frac{3^{n+2}}{2}, -\frac{3^{n+1}}{2}]$, denn $z_g = -\frac{3}{2}$ und $g(x) \equiv 3x$ auf $(-\infty, 0)$. Sei nun $H_0 : I_0(f) \rightarrow I_0(g)$ ein beliebiger streng monoton wachsender Homöomorphismus. Dann definieren wir

$$h_0(x) := g_1^{-n} \circ H_0 \circ f_1^n(x) \quad \text{falls } x \in I_n(f).$$

Es gilt $h_0 \in \mathcal{H}^+((-\infty, 0))$ und $h_0(I_n(f)) = I_n(g)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Ferner ist h_0 nach Konstruktion eine Konjugation von f nach g auf $(-\infty, 0)$, und wir können h_0 problemlos zu einer Konjugation auf $\mathbb{R} \setminus [0, 1]$ durch

$$h_0(x) := 1 - h_0(1 - x) \quad \text{für alle } x \in (1, \infty)$$

fortsetzen. Mit (e) folgt dann nämlich für alle $x > 1$

$$h_0(f(x)) = h_0(f(1 - x)) = g(h_0(1 - x)) = g(1 - h_0(1 - x)) = g(h_0(x)).$$

Nun definieren wir

$$\mathcal{H}_{fg} := \{h \in \mathcal{H}^+(\mathbb{R}) \mid h(x) = h_0(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \setminus [0, 1]\}.$$

\mathcal{H}_{fg} besteht also aus allen streng monoton wachsenden Homöomorphismen $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die auf $\mathbb{R} \setminus [0, 1]$ mit h_0 übereinstimmen. Wegen $\lim_{x \rightarrow 0} h_0(x) = 0$ und $\lim_{x \rightarrow 1} h_0(x) = 1$ gilt außerdem $h(0) = 0$, $h(1) = 1$ und damit $h([0, 1]) = [0, 1]$ für alle $h \in \mathcal{H}_{fg}$. Versehen wir \mathcal{H}_{fg} mit der Metrik Δ^\pm , so erhalten wir offensichtlich einen vollständigen metrischen Raum homöomorph zu $(\mathcal{H}([0, 1]), \Delta^\pm)$. Auf \mathcal{H}_{fg} können wir einen Pullback-Operator von f nach g definieren:

$$\Phi_{fg}(h)(x) := \begin{cases} g_1^{-1} \circ h \circ f_1(x) & \text{für } x \leq \frac{1}{2} \\ g_2^{-1} \circ h \circ f_2(x) & \text{für } x > \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Da alle Abbildungen $h \in \mathcal{H}_{fg}$ nach Konstruktion den Orbit $O_f^+(\frac{1}{2})$ des einzigen kritischen Punktes $\frac{1}{2}$ in der richtigen Weise auf den Orbit $O_g^+(\frac{1}{2})$ abbilden, ist $\Phi_{fg}(h)$ für jedes $h \in \mathcal{H}_{fg}$ ein wohldefinierter Homöomorphismus (siehe Beweis von Satz 4.2.5). Lediglich die Stetigkeit von $\Phi_{fg}(h)$ bei $x = \frac{1}{2}$ ist nicht ganz offensichtlich. Sie ergibt sich folgendermaßen: $F(1 - F(\frac{1}{2})) = F(F(\frac{1}{2})) = F^2(\frac{1}{2}) \Rightarrow 1 - F(\frac{1}{2}) = F_1^{-1}(z_F)$. Damit erhält man dann

$$\begin{aligned} g_1^{-1}(h(f_1(\frac{1}{2}))) &= g_1^{-1}(1 - h(1 - f(\frac{1}{2}))) = g_1^{-1}(1 - h(f_1^{-1}(z_F))) \\ &= g_1^{-1}(1 - g_1^{-1}(z_g)) = g_1^{-1}(g(\frac{1}{2})) = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

und analog $g_2^{-1}(h(f_2(\frac{1}{2}))) = \frac{1}{2}$. Auf $\mathbb{R} \setminus [0, 1]$ wird h durch Φ_{fg} nicht verändert, da hier bereits die Konjugationsgleichung erfüllt ist. Also bildet Φ_{fg} nach \mathcal{H}_{fg}

ab. Es bleibt zu zeigen, dass Φ_{fg} eine Kontraktion ist. Dazu verwenden wir die in Beispiel 5.1.7 bewiesene Ungleichung

$$|f'(x)| \geq \sqrt{\alpha} \frac{\Phi(f(x))}{\Phi(x)} \quad \text{für alle } x \in [0, 1] \cap f^{-1}([0, 1]). \quad (5.8)$$

Wir definieren einen Homöomorphismus $\Psi \in \mathcal{H}^+(\mathbb{R})$ durch

$$\Psi(x) := \left\{ \begin{array}{ll} x & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus [0, 1] \\ (\int_0^1 \frac{dz}{\Phi(z)})^{-1} \int_0^x \frac{dz}{\Phi(z)} & \text{für } x \in [0, 1] \end{array} \right\}. \quad (5.9)$$

Eine explizite Formel für $\Psi|_{[0,1]}$ ist $\Psi(x) = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x}$. Die Umkehrabbildung ist gegeben durch $\Psi^{-1}(x) = \sin^2(\frac{\pi}{2}x)$. Nun definieren wir auf \mathcal{H}_{fg} eine neue Metrik durch

$$\Delta_\Psi^\pm(h, k) := \Delta(h, k) + \Delta(\Psi \circ h^{-1}, \Psi \circ k^{-1}) \quad \text{für alle } h, k \in \mathcal{H}_{fg}.$$

Man überzeugt sich leicht davon, dass auch $(\mathcal{H}_{fg}, \Delta_\Psi^\pm)$ ein vollständiger metrischer Raum ist. Sei nun $J_1 := (-\infty, \frac{1}{2}]$ und $J_2 := [\frac{1}{2}, \infty)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \Delta(\Phi_{fg}(h), \Phi_{fg}(k)) &= \max_{i=1,2} \sup_{x \in J_i} |g_i^{-1}(h(f_i(x))) - g_i^{-1}(k(f_i(x)))| \\ &= \max_{i=1,2} \sup_{y \in f(J_i)} |g_i^{-1}(h(y)) - g_i^{-1}(k(y))| \\ &= \max_{i=1,2} \sup_{y \in f(J_i)} \frac{1}{3} |h(y) - k(y)| \\ &= \frac{1}{3} \sup_{y \in f(\mathbb{R})} |h(y) - k(y)| \\ &= \frac{1}{3} \sup_{y \in [0,1]} |h(y) - k(y)| = \frac{1}{3} \Delta(h, k). \end{aligned}$$

Außerdem ergibt sich mit dem Mittelwertsatz

$$\begin{aligned} \Delta(\Psi \circ \Phi_{fg}(h)^{-1}, \Psi \circ \Phi_{fg}(k)^{-1}) &= \Delta(\Psi \circ \Phi_{gf}(h^{-1}), \Psi \circ \Phi_{gf}(k^{-1})) \\ &= \max_{i=1,2} \sup_{x \in J_i} |\Psi \circ f_i^{-1} \circ h^{-1} \circ g_i(x) - \Psi \circ f_i^{-1} \circ k^{-1} \circ g_i(x)| \\ &= \max_{i=1,2} \sup_{y \in g(J_i)} |\Psi \circ f_i^{-1} \circ h^{-1}(y) - \Psi \circ f_i^{-1} \circ k^{-1}(y)| \\ &= \max_{i=1,2} \sup_{y \in g(J_i)} |\Psi \circ f_i^{-1} \circ \Psi^{-1} \circ \Psi \circ h^{-1}(y) - \Psi \circ f_i^{-1} \circ \Psi^{-1} \circ \Psi \circ k^{-1}(y)| \\ &= \max_{i=1,2} \sup_{y \in g(J_i)} |(\Psi \circ f_i^{-1} \circ \Psi^{-1})'(\xi_y)| |\Psi \circ h^{-1}(y) - \Psi \circ k^{-1}(y)| \\ &\leq \left[\max_{z \in [0,1], i=1,2} |(\Psi \circ f_i^{-1} \circ \Psi^{-1})'(z)| \right] \Delta(\Psi \circ h^{-1}, \Psi \circ k^{-1}). \end{aligned}$$

Letztere Abschätzung gilt, da $|\Psi \circ h^{-1}(y) - \Psi \circ k^{-1}(y)| = 0$ für $y \notin [0, 1]$. Damit reicht es, den Fall $\xi_y \in [0, 1]$ in Betracht zu ziehen. Mit $w = \Psi^{-1}(z)$ gilt für

alle $z \in [0, 1]$

$$\begin{aligned}
 |(\Psi \circ f_i^{-1} \circ \Psi^{-1})'(z)| &= \frac{\Psi'(f_i^{-1}(w))}{\Psi'(w)} |(f_i^{-1})'(w)| \\
 &\stackrel{(5.9)}{=} \frac{\Phi(f_i(f_i^{-1}(w)))}{\Phi(f_i^{-1}(w))} \frac{1}{|f_i'(f_i^{-1}(w))|} \\
 &\stackrel{(5.8)}{\leq} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \frac{\Phi(f_i(f_i^{-1}(w)))}{\Phi(f_i^{-1}(w))} \frac{\Phi(f_i^{-1}(w))}{\Phi(f(f_i^{-1}(w)))} \leq \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

Damit folgt schließlich

$$\Delta_{\Psi}^{\pm}(\Phi_{fg}(h), \Phi_{fg}(k)) \leq \frac{1}{3}\Delta(h, k) + \frac{1}{2}\Delta(\Psi \circ h^{-1}, \Psi \circ k^{-1}) \leq \frac{1}{2}\Delta_{\Psi}^{\pm}(h, k).$$

Also ist Φ_{fg} eine Kontraktion und folglich sind f und g konjugiert. \diamond

5.2.2 Bemerkung:

Beachtet man, welche Eigenschaften der Abbildungen f und g wir verwendet haben, um deren Konjugiertheit nachzuweisen, so ist unmittelbar klar, dass auch zwei Zeltabbildungen $T_{\beta_i}(x) = \beta_i(1 - |2x - 1|)$ mit $\beta_i > 1$ ($i = 1, 2$) zueinander konjugiert sind. Da es in diesem Fall möglich ist, eine Konjugation auf $\mathbb{R} \setminus [0, 1]$ explizit durch

$$h(x) = \begin{cases} -C(-x)^{\frac{\ln(2\beta_2)}{\ln(2\beta_1)}} & \text{für } x \in (-\infty, 0) \\ 1 + C(1 - x)^{\frac{\ln(2\beta_2)}{\ln(2\beta_1)}} & \text{für } x \in (1, \infty) \end{cases}$$

anzugeben (wobei C eine Skalierungskonstante bezeichnet), ist es möglich mit Hilfe des Pullback-Operators eine Approximation der konjugierenden Abbildung graphisch darzustellen. Folgende Grafik zeigt die vierte Iteration des Pullback-Operators $\Phi_{\beta_1\beta_2}$ auf den durch $h(x) = x$ auf $[0, 1]$ fortgesetzten Homöomorphismus h_0 für die Parameterwerte $\beta_1 = \frac{3}{2}$, $\beta_2 = 2$ im Intervall $[0, 1]$.

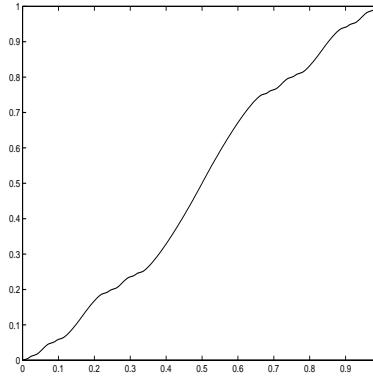


Abbildung 5.4: $\Phi_{\beta_1\beta_2}^4(h_0)$ für $\beta_1 = \frac{3}{2}$, $\beta_2 = 2$.

Für höhere Iterationen $\Phi_{\beta_1\beta_2}^n(h_0)$, $n > 4$, ist keine sichtbare Änderung des Graphen mehr festzustellen.

5.2.3 Bemerkung:

Nach Beispiel 5.1.12 und 5.2.1 ist klar, dass die Abbildungen $f_\alpha(x) = 1 - 2|x|^\alpha$, $f_\alpha : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$, für $\alpha > \frac{1}{2}$ paarweise zueinander konjugiert sind.

5.3 Konjugiertheit expandierender Abbildungen

In diesem Abschnitt wollen wir zwei Resultate über die Konjugiertheit expandierender Abbildungen beweisen. Beide Resultate sind Verallgemeinerungen des Konjugationsresultats in [Shb 69], welches besagt, dass die topologische Konjugiertheit zweier expandierender C^1 -Abbildungen auf einer kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit äquivalent zur „algebraischen Konjugiertheit“ auf Fundamentalgruppenniveau ist.

5.3.1 Lemma:

Es sei (X, d) ein semilokal einfach zusammenhängender kompakter Längenraum und $f : X \rightarrow X$ eine offene expandierende Abbildung mit Expansionsfaktor λ . Dann ist jede Liftung \tilde{f} von f in den universellen Überlagerungsraum \tilde{X} global expandierend bzgl. der gelifteten Metrik \tilde{d} mit Expansionsfaktor λ . Es gilt also

$$\tilde{d}(\tilde{f}(\tilde{x}), \tilde{f}(\tilde{y})) \geq \lambda \tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) \quad \text{für alle } \tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{X}.$$

Beweis:

Da X semilokal einfach zusammenhängend ist, existiert die universelle Überlagerung $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$. Nach Satz 3.2.1 ist \tilde{X} mit der gelifteten Metrik \tilde{d} ein vollständiger geodätischer Längenraum. Sei $\tilde{f} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ eine Liftung von f . Wir wollen zeigen, dass \tilde{f} expandierend ist. Seien $\varepsilon_0 > 0$ und $\lambda > 1$ so gewählt, dass $d(f(x), f(y)) \geq \lambda d(x, y)$ für $d(x, y) < \varepsilon_0$ gilt.

Sei $\tilde{K} \subset \tilde{X}$ kompakt. Dann ist auch $\tilde{f}(\tilde{K}) \subset \tilde{X}$ kompakt. Zu jedem $\tilde{x} \in \tilde{K}$ existieren positive Zahlen $\varepsilon(\tilde{x}), \varepsilon(\tilde{f}(\tilde{x})) > 0$, so dass die Einschränkungen $\pi|_{B(\tilde{x}, \varepsilon(\tilde{x}))}$ und $\pi|_{B(\tilde{f}(\tilde{x}), \varepsilon(\tilde{f}(\tilde{x})))}$ Isometrien sind. Sei $\varepsilon_0 > 0$ eine Lebesgue-Zahl der offenen Überdeckung $\{B(\tilde{f}(\tilde{x}), \varepsilon(\tilde{f}(\tilde{x})))\}_{\tilde{x} \in \tilde{K}}$ von $\tilde{f}(\tilde{K})$. Da \tilde{f} auf \tilde{K} gleichmäßig stetig ist, existiert ein $\delta_1 > 0$, so dass $\tilde{d}(\tilde{f}(\tilde{x}), \tilde{f}(\tilde{y})) < \varepsilon$ aus $\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) < \delta_1$ folgt. Ebenso existiert eine Lebesgue-Zahl $\delta_2 > 0$ der offenen Überdeckung $\{B(\tilde{x}, \varepsilon(\tilde{x}))\}_{\tilde{x} \in \tilde{K}}$ von \tilde{K} . Wir setzen $\tilde{\varepsilon}_0 := \min\{\delta_1, \delta_2, \varepsilon_0\}$. Gilt nun für zwei Punkte $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{K}$, dass $r := \tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) < \tilde{\varepsilon}_0$, so folgt

$$\begin{aligned} \tilde{d}(\tilde{f}(\tilde{x}), \tilde{f}(\tilde{y})) &\stackrel{r \leq \delta_1}{=} d(\pi(\tilde{f}(\tilde{x})), \pi(\tilde{f}(\tilde{y}))) \\ &= d(f(\pi(\tilde{x})), f(\pi(\tilde{y}))) \\ &\stackrel{r < \min\{\delta_2, \varepsilon_0\}}{\geq} \lambda d(\pi(\tilde{x}), \pi(\tilde{y})) \\ &\stackrel{r \leq \delta_2}{=} \lambda \tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}). \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass \tilde{f} auf jeder kompakten Teilmenge von \tilde{X} expandierend ist mit Expansionsfaktor λ . Nach Satz 3.4.7 ist f eine Überlagerungsabbildung und damit \tilde{f} ein Homöomorphismus nach Satz 3.1.8 (d). Sind nun $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{X}$

beliebig gewählt, so existiert ein kürzester Weg $c : I \rightarrow \tilde{X}$ von $\tilde{f}(\tilde{x})$ nach $\tilde{f}(\tilde{y})$. Da $\tilde{f}^{-1}(c(I))$ kompakt ist, ist \tilde{f} auf $\tilde{f}^{-1}(c(I))$ expandierend. Wählen wir eine Partition $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ so fein, dass $\tilde{d}(\tilde{f}^{-1}(c(t_i)), \tilde{f}^{-1}(c(t_{i+1}))) < \tilde{\varepsilon}_0$ ($\tilde{\varepsilon}_0$ eine Expansionskonstante) für $i = 0, \dots, n-1$ gilt, so folgt

$$\begin{aligned} \tilde{d}(\tilde{f}(\tilde{x}), \tilde{f}(\tilde{y})) &= \sum_{i=1}^n \tilde{d}(c(t_i), c(t_{i+1})) = \sum_{i=1}^n \tilde{d}(\tilde{f}(\tilde{f}^{-1}(c(t_i))), \tilde{f}(\tilde{f}^{-1}(c(t_{i+1})))) \\ &\geq \lambda \sum_{i=1}^n \tilde{d}(\tilde{f}^{-1}(c(t_i)), \tilde{f}^{-1}(c(t_{i+1}))) \geq \lambda \tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}). \end{aligned}$$

□

5.3.2 Satz (Shub):

Sei (X, d) ein semilokal einfach zusammenhängender kompakter Längenraum, $f : X \rightarrow X$ eine Überlagerungsabbildung und $g : X \rightarrow X$ offen und expandierend. Dann gilt:

- (a) Existieren Liftungen \tilde{f}, \tilde{g} von f, g in den universellen Überlagerungsraum von X , so dass f und g kombinatorisch äquivalent im Sinne von Satz 4.2.15 sind (d. h. $\mathcal{K}(f, \tilde{f}) = \mathcal{K}(g, \tilde{g})$), so ist f zu g semikonjugiert.
- (b) Ist zudem auch f expandierend, so sind f und g topologisch konjugiert.

Beweis:

- (a) Als offene expandierende Abbildung auf dem zusammenhängenden und kompakten Raum X ist g nach Satz 3.4.7 ebenfalls eine Überlagerung. $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ sei die universelle Überlagerung von X . Sind dann $\tilde{f}, \tilde{g} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ Liftungen von f, g mit $\mathcal{K}(f, \tilde{f}) = \mathcal{K}(g, \tilde{g})$, so existiert ein Pullback-Operator $\tilde{\Phi}_{\tilde{f}\tilde{g}} : \tilde{\mathcal{H}}_{\tilde{f}\tilde{g}} \rightarrow \tilde{\mathcal{H}}_{\tilde{f}\tilde{g}}$ von \tilde{f} nach \tilde{g} . Dabei ist $\tilde{\mathcal{H}}_{\tilde{f}\tilde{g}} = \mathcal{H}_L(\tilde{X}, \varphi)$ für einen Automorphismus $\varphi \in \text{Aut}(\text{D}(\pi))$. Nach Korollar 3.3.2 ist $\mathcal{H}_L(\tilde{X}, \varphi)$ metrisierbar durch die Supremumsmetrik $\tilde{\Delta}$. Nach Satz 3.3.1 ist $(\text{cl}(\mathcal{H}_L(\tilde{X}, \varphi)), \tilde{\Delta}) \subset (\mathcal{C}_L(\tilde{X}, \varphi), \tilde{\Delta})$ ein vollständiger metrischer Raum. Nach Korollar 4.1.6 existiert der erweiterte Pullback-Operator $\tilde{\Phi}_{\tilde{f}\tilde{g}}^* : \text{cl}(\tilde{\mathcal{H}}_{\tilde{f}\tilde{g}}) \rightarrow \text{cl}(\tilde{\mathcal{H}}_{\tilde{f}\tilde{g}})$. Es reicht daher zu zeigen, dass $\tilde{\Phi}_{\tilde{f}\tilde{g}}$ eine Kontraktion ist. Ist λ der Expansionsfaktor von g , so gilt mit Lemma 5.3.1 für alle $\tilde{h}_1, \tilde{h}_2 \in \tilde{\mathcal{H}}_{\tilde{f}\tilde{g}}$:

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}(\tilde{\Phi}_{\tilde{f}\tilde{g}}(\tilde{h}_1), \tilde{\Phi}_{\tilde{f}\tilde{g}}(\tilde{h}_2)) &= \tilde{\Delta}(\tilde{g}^{-1} \circ \tilde{h}_1) \circ \tilde{f}, \tilde{g}^{-1} \circ \tilde{h}_2 \circ \tilde{f}) \\ &= \tilde{\Delta}(\tilde{g}^{-1} \circ \tilde{h}_1, \tilde{g}^{-1} \circ \tilde{h}_2) \\ &= \sup_{\tilde{x}} \tilde{d}(\tilde{g}^{-1} \circ \tilde{h}_1(\tilde{x}), \tilde{g}^{-1} \circ \tilde{h}_2(\tilde{x})) \\ &\leq \lambda^{-1} \sup_{\tilde{x}} \tilde{d}(\tilde{h}_1(\tilde{x}), \tilde{h}_2(\tilde{x})) \\ &= \lambda^{-1} \tilde{\Delta}(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2). \end{aligned}$$

Also ist $\tilde{\Phi}_{\tilde{f}\tilde{g}}$ eine Kontraktion mit Kontraktionsfaktor λ^{-1} . Folglich existiert (genau) ein $\tilde{h} \in \text{cl}(\tilde{\mathcal{H}}_{\tilde{f}\tilde{g}}) \subset \mathcal{C}_L(\tilde{X}, \varphi)$ mit $\tilde{h} \circ \tilde{f} = \tilde{g} \circ \tilde{h}$. Nach Satz

3.1.8 (c) ist \tilde{h} Liftung einer stetigen Abbildung $h \in \mathcal{C}(X)$, und damit gilt $h \circ f = g \circ h$. Zudem ist h surjektiv, da $h(X) = h(\pi(\tilde{X})) = \pi(\tilde{h}(\tilde{X})) = \pi(\tilde{X}) = X$.

- (b) Ist auch f expandierend, so zeigt man leicht, dass $\tilde{\Phi}_{\tilde{f}\tilde{g}}$ bzgl. $\tilde{\Delta}^\pm$ eine Kontraktion ist. Nach Satz 3.3.1 ist $(\tilde{\mathcal{H}}_{\tilde{f}\tilde{g}}, \tilde{\Delta}^\pm)$ vollständig. Also existiert ein $\tilde{h} \in \tilde{\mathcal{H}}_{\tilde{f}\tilde{g}}$ mit $\tilde{h} \circ \tilde{f} = \tilde{g} \circ \tilde{h}$. \tilde{h} ist nach Satz 3.1.8 (c) Liftung eines Homöomorphismus $h \in \mathcal{H}(X)$, und es gilt $h \circ f = g \circ h$. \square

5.3.3 Bemerkungen:

- Insbesondere gilt nach dem vorherigen Satz, dass aus der Homotopie zweier offener expandierender Abbildungen ihre Konjugiertheit folgt (siehe Satz 4.2.15).
- Der Satz impliziert das Resultat von M. Shub in [Shb 69]. Ob er allerdings tatsächlich eine Verallgemeinerung von diesem ist, ist nach den Ergebnissen in Kapitel 3 fraglich (siehe Korollar 3.4.24).

5.3.4 Beispiel:

Jede offene expandierende Abbildung $f : T^n \rightarrow T^n$ des n -dimensionalen Torus ist topologisch konjugiert zu einem expandierenden linearen Torusendomorphismus $E_M : T^n \rightarrow T^n$ (siehe Beispiele 3.2.3 und 3.4.28). Jede Liftung $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ von f induziert auf $D(\pi)$ einen injektiven Endomorphismus \tilde{f}^* . Indem wir die Decktransformation $\beta(x) \equiv x + N$ ($N \in \mathbb{Z}^n$) mit N identifizieren, können wir \tilde{f}^* als Endomorphismus $\tilde{f}^* : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ auffassen. Dann existiert eine $n \times n$ -Matrix $M \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ mit $\tilde{f}^*(x) \equiv Mx$. Wir können M auch als lineare Abbildung von \mathbb{R}^n nach \mathbb{R}^n auffassen, so dass $\tilde{f}|_{\mathbb{R}^n} = M|_{\mathbb{R}^n}$. Da f expandierend ist, ist nach Lemma 5.3.1 \tilde{f} global expandierend, und damit auch M . Folglich ist auch $E_M : T^n \rightarrow T^n$ expandierend und wegen $M^* = M = \tilde{f}^*$ kombinatorisch äquivalent zu f . Nach Satz 5.3.2 sind E_M und f topologisch konjugiert. Zwei lineare Torusendomorphismen E_A und E_B sind genau dann topologisch konjugiert, wenn A und B durch einen Automorphismus $C \in \text{Aut}(\mathbb{Z}^n)$ konjugiert sind. Dies liegt daran, dass die Konjugationsgleichung $h \circ E_A = E_B \circ h$ eine Konjugationsgleichung $h_* \circ (E_A)_* = (E_B)_* \circ h_*$ auf der ersten singulären Homologiegruppe $H_1(T^n) = \mathbb{Z}^n$ induziert und dass E_M auf $H_1(T^n) = \mathbb{Z}^n$ den Homomorphismus M induziert. In [Adl 97] findet man eine vollständige Lösung des linearen Konjugationsproblems in $\mathbb{Z}^{n \times n}$ für $n = 2$. \diamond

5.3.5 Korollar:

Sei (X, d) ein semilokal einfach zusammenhängender kompakter Längenraum. $f, g : X \rightarrow X$ seien offene expandierende Abbildungen mit Fixpunkten $x_f, x_g \in X$ und $\mathcal{K}(f, x_f) = \mathcal{K}(g, x_g)$ (siehe Satz 4.2.13). Dann existiert eine 1-1-Korrespondenz zwischen den Konjugationen von f nach g mit $h(x_f) = x_g$ und den Isomorphismen $\varphi \in \Gamma(f, g)$ mit $\mathcal{H}_{fg}^\varphi \neq \emptyset$, gegeben durch $h \mapsto h_*$.

Beweis:

Nach Korollar 4.2.17 sind f und g auch kombinatorisch äquivalent im Sinne von 4.2.15. Insbesondere können wir Punkte $\tilde{x}_f, \tilde{x}_g \in \tilde{X}$ ($\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ die

universelle Überlagerung) wählen und Liftungen $\tilde{f}, \tilde{g} \in \mathcal{H}(\tilde{X})$ mit $\tilde{f}(\tilde{x}_f) = \tilde{x}_f$, $\tilde{g}(\tilde{x}_g) = \tilde{x}_g$. Existiert ein $\alpha \in \mathcal{H}_{fg}^\varphi$, so existiert außerdem eine Liftung $\tilde{\alpha}$ von α mit $\tilde{\alpha}(\tilde{x}_f) = \tilde{x}_g$, so dass $\tilde{\alpha}^* \tilde{f}^* = \tilde{g}^* \tilde{\alpha}^*$ gilt (siehe Beweis von Korollar 4.2.17). Sei $\tilde{\Phi}_{\tilde{f}\tilde{g}}$ der Pullback-Operator von \tilde{f} nach \tilde{g} und $\tilde{\mathcal{H}}^\varphi = \{\tilde{h} \in \tilde{\mathcal{H}}_{\tilde{f}\tilde{g}} \mid \tilde{h}(\tilde{x}_f) = \tilde{x}_g\}$. Nach Korollar 4.2.17 kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathcal{H}}^\varphi & \xrightarrow{\tilde{\Phi}_{\tilde{f}\tilde{g}}} & \tilde{\mathcal{H}}^\varphi \\ \Pr \downarrow & & \downarrow \Pr \\ \mathcal{H}_{fg}^\varphi & \xrightarrow{\Phi_{fg}} & \mathcal{H}_{fg}^\varphi \end{array}$$

Im Beweis von Satz 5.3.2 haben wir gezeigt, dass der Pullback-Operator $\tilde{\Phi}_{\tilde{f}\tilde{g}}$ eine Kontraktion ist. Folglich gilt $\tilde{H}(\tilde{x}_f) = \tilde{x}_g$ für den eindeutigen bestimmten Fixpunkt \tilde{H} . Die Projektion $H := \Pr(\tilde{H}) \in \mathcal{H}_{fg}^\varphi$ ist damit eine Konjugation von f nach g mit $H(x_f) = x_g$ und $H_* = \varphi$.

Ist H' eine weitere Konjugation von f nach g mit $H'(x_f) = x_g$ und $H'_* = \varphi$, so liegt H' in \mathcal{H}_{fg}^φ und ist nach dem Eindeutigkeitssatz für Liftungen ein Fixpunkt von Φ_{fg} . Folglich gilt $H' = H$. \square

5.3.6 Bemerkung:

Ist X eine n -dimensionale kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit und sind f, g differenzierbar und expandierend im Sinne von (3.6), so kann man zeigen, dass X von \mathbb{R}^n universell überlagert wird. Daraus ergibt sich, dass $\mathcal{H}_{fg}^\varphi \neq \emptyset$ für alle $\varphi \in \Gamma(f, g)$ gilt (siehe dazu [Shb 69, Theorem 5]).

Wir wollen das Konjugationsresultat von Shub noch in eine andere Richtung verallgemeinern. Dazu betrachten wir eine normale Projektion $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$, wobei \tilde{M} eine vollständige, einfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit und Γ eine Untergruppe der Isometriengruppe von \tilde{M} ist. Der Riemannsche Abstand oder jede andere Metrik \tilde{d} auf \tilde{M} induziert auf M eine Quotientenmetrik \bar{d} , die M zu einem Längenraum macht⁵, wobei

$$\bar{d}(x, y) = \bar{d}(\pi(\tilde{x}), \pi(\tilde{y})) = \inf_{\gamma \in \Gamma} \tilde{d}(\tilde{x}, \gamma(\tilde{y})). \quad (5.10)$$

Da eine liftbare Abbildung $f : M \rightarrow M$ i. A. nicht expandierend sein kann, falls die singuläre Menge von π nicht leer ist, müssen wir unseren Expansionsbegriff folgendermaßen abschwächen:

5.3.7 Definition (Quasi-expandierende Abbildungen):

Sei $f : M \rightarrow M$ eine Abbildung, die das Liftbarkeitskriterium 3.1.13 erfüllt. Dann heißt f **quasi-expandierend**, falls eine Konstante $\lambda > 1$ und für alle $x \in M \setminus f^{-1}(\Sigma_\pi)$ ein $\varepsilon(x) > 0$ existiert, so dass gilt:

$$z, w \in B(x, \varepsilon(x)) \Rightarrow \bar{d}(f(z), f(w)) \geq \lambda \bar{d}(z, w). \quad (5.11)$$

⁵Da wir dies aber nicht verwenden, werden wir es auch nicht beweisen.

5.3.8 Bemerkung:

Nach Lemma 3.1.15 gilt $M \setminus f^{-1}(\Sigma_\pi) \subset M \setminus \Sigma_\pi$. Für jedes $x \in M \setminus f^{-1}(\Sigma_\pi)$ ist damit anhand des Diagramms (3.1) ersichtlich, dass f bei x ein lokaler Homöomorphismus ist. Dies zeigt, dass Definition 5.3.7 sinnvoll ist.

5.3.9 Lemma:

Sei $f : M \rightarrow M$ eine quasi-expandierende Abbildung. Dann ist jede Liftung $\tilde{f} : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$ von f global expandierend.

Beweis:

Sei \tilde{f} eine Liftung von f und seien $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{M}$ beliebig gewählt. Dann existiert eine kürzeste Geodäte $c : I \rightarrow \tilde{M}$ von $\tilde{f}(\tilde{x})$ nach $\tilde{f}(\tilde{y})$. Sei $\tilde{c} := \tilde{f}^{-1} \circ c$. Da Σ_π nach Vereinbarung 3.1.12 endlich ist, ist $\pi^{-1}(f^{-1}(\Sigma_\pi)) = \tilde{f}^{-1}(\pi^{-1}(\Sigma_\pi))$ diskret (und abgeschlossen), was aus Satz 3.1.6 (c) folgt. Daher ist der Schnitt von $\pi^{-1}(f^{-1}(\Sigma_\pi))$ mit der kompakten Menge $\tilde{c}(I)$ endlich. Es existiert also eine Partition $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$, so dass $\tilde{c}((t_{i-1}, t_i)) \subset \tilde{M} \setminus \pi^{-1}(f^{-1}(\Sigma_\pi))$ für $i = 1, \dots, n$ gilt. Für jeden Punkt $\tilde{x} \in \tilde{c}((t_{i-1}, t_i))$ gilt also $f(\pi(\tilde{x})) \notin \Sigma_\pi$ und damit $\pi(\tilde{x}) \notin f^{-1}(\Sigma_\pi) \supset \Sigma_\pi$. Nach Definition 5.3.7 existiert folglich ein $\varepsilon = \varepsilon(\tilde{x}) > 0$, so dass gilt:

$$z, w \in B(\pi(\tilde{x}), \varepsilon(\tilde{x})) \Rightarrow \bar{d}(f(z), f(w)) \geq \lambda \bar{d}(z, w).$$

Aufgrund der Stetigkeit von π existiert eine Umgebung \tilde{U} von \tilde{x} mit $\pi(\tilde{U}) \subset B(\pi(\tilde{x}), \varepsilon(\tilde{x}))$, so dass $\pi|_{\tilde{U}}$ injektiv ist. Wählen wir \tilde{U} klein genug, so gilt für alle $\tilde{z}, \tilde{w} \in \tilde{U}$:

$$\begin{aligned} \tilde{d}(\tilde{f}(\tilde{z}), \tilde{f}(\tilde{w})) &\geq \inf_{\gamma \in \Gamma} \tilde{d}(\tilde{f}(\tilde{z}), \gamma(\tilde{f}(\tilde{w}))) \stackrel{(5.10)}{=} \bar{d}(\pi(\tilde{f}(\tilde{z})), \pi(\tilde{f}(\tilde{w}))) \\ &= \bar{d}(f(\pi(\tilde{z})), f(\pi(\tilde{w}))) \geq \lambda \bar{d}(\pi(\tilde{z}), \pi(\tilde{w})) \\ &\stackrel{(5.10)}{=} \lambda \inf_{\gamma \in \Gamma} \tilde{d}(\tilde{z}, \gamma(\tilde{w})) = \lambda d(\tilde{z}, \tilde{w}). \end{aligned}$$

Wir können daher für jedes der offenen Intervalle (t_{i-1}, t_i) eine Partition

$$t_{i-1} < \dots < s_{-2}^i < s_{-1}^i < s_0^i < s_1^i < s_2^i < \dots < t_i$$

in unendlich viele Teilintervalle finden, so dass \tilde{f} auf jeder der Mengen $\tilde{c}([s_{j-1}, s_j])$ expandierend ist. Damit folgt

$$\begin{aligned} \tilde{d}(\tilde{f}(\tilde{x}), \tilde{f}(\tilde{y})) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=-\infty}^{\infty} \tilde{d}(c(s_{j-1}^i), c(s_j^i)) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=-\infty}^{\infty} \tilde{d}(\tilde{f} \circ \tilde{f}^{-1} \circ c(s_{j-1}^i), \tilde{f} \circ \tilde{f}^{-1} \circ c(s_j^i)) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=-\infty}^{\infty} \tilde{d}(\tilde{f}(\tilde{c}(s_{j-1}^i)), \tilde{f}(\tilde{c}(s_j^i))) \\ &\geq \lambda \sum_{i=1}^n \sum_{j=-\infty}^{\infty} \tilde{d}(\tilde{c}(s_{j-1}^i), \tilde{c}(s_j^i)) = \lambda L(\tilde{c}) \geq \lambda \tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}). \end{aligned}$$

□

5.3.10 Korollar (Verallgemeinertes Shub-Kriterium):

Sei \tilde{M} eine vollständige, einfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit. Sei ferner $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ eine normale Projektion, deren Decktransformationengruppe Γ eine Untergruppe der Isometriengruppe von \tilde{M} ist. $f, g : M \rightarrow M$ seien quasi-expandierende Abbildungen, die das Liftbarkeitskriterium 3.1.13 erfüllen und durch ihre Liftungen auf Γ den gleichen Endomorphismus φ induzieren. Dann sind f und g topologisch konjugiert.

Beweis:

Seien $\tilde{f}, \tilde{g} \in \mathcal{H}(\tilde{M})$ Liftungen von $f, g : M \rightarrow M$ mit $\tilde{f}^* = \tilde{g}^*$. Nach Satz 4.2.1 existiert der Pullback-Operator $\tilde{\Phi}_{\tilde{f}\tilde{g}} : \mathcal{H}_L(\tilde{M}, \text{id}) \rightarrow \mathcal{H}_L(\tilde{M}, \text{id})$. Nach Satz 3.3.1 ist $\mathcal{H}_L(\tilde{M}, \text{id})$ vollständig metrisierbar durch $\tilde{\Delta}^\pm$. Nach Lemma 5.3.9 sind \tilde{f}, \tilde{g} global expandierende Abbildungen. Daher folgt mit den gleichen Argumenten wie im Beweis von Satz 5.3.2, dass $\tilde{\Phi}_{\tilde{f}\tilde{g}}$ eine Kontraktion ist. Der eindeutige Fixpunkt \tilde{h} ist eine Konjugation von \tilde{f} nach \tilde{g} und lässt sich nach Bemerkung 4.2.2 zu einer Konjugation $h : M \rightarrow M$ von f nach g projizieren. □

5.3.11 Bemerkungen:

- Fordert man nur, dass die Abbildung g quasi-expandierend ist, so folgt natürlich immer noch die Existenz einer Semi-Konjugation von f nach g .
- Die Voraussetzungen des Satzes lassen sich natürlich dahingehend abschwächen, dass man die Existenz eines Homöomorphismus $h : M \rightarrow M$ mit einer Liftung \tilde{h} fordert, so dass $\tilde{h}^* \circ \tilde{f}^* = \tilde{g}^* \circ \tilde{h}^*$ gilt.

5.3.12 Beispiel:

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Gruppe

$$\Gamma_n := \{\gamma_k^\pm\}_{k \in \mathbb{Z}^n} \text{ mit } \gamma_k^\pm(x) = k \pm x.$$

Im dritten Kapitel haben wir gesehen, dass Γ_1 die Decktransformationengruppe der normalen Projektion $\pi(x) = \cos(2\pi x)$, $\mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$, ist (siehe Beispiel 3.1.9). Man sieht leicht ein, dass Γ_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ eigentlich diskontinuierlich und isometrisch auf dem \mathbb{R}^n operiert. $K_n := [0, \frac{1}{2}] \times [0, 1]^{n-1}$ ist ein kompakter Fundamentalbereich dieser Wirkung, d. h. es gilt $\Gamma_n(K_n) = \mathbb{R}^n$ und jeder Orbit trifft das Innere von K_n höchstens einmal. Es gilt nämlich $\gamma_{(1, \dots, 1)}^-(K_n) = [\frac{1}{2}, 1] \times [0, 1]^{n-1}$ und damit

$$\begin{aligned} \Gamma_n(K_n) &= \Gamma_n([0, 1]^n) \supset \bigcup_{k \in \mathbb{Z}^n} (k + [0, 1]^n) \\ &= \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{k_i \in \mathbb{Z}} [k_1, k_1 + 1] \times \dots \times [k_n, k_n + 1] = \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Die Menge $\text{int } K = (0, \frac{1}{2}) \times (0, 1)^{n-1}$ ist offensichtlich disjunkt von den Translaten $\gamma_k^+(\text{int } K)$ mit $k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ und wegen $\gamma_{(1, \dots, 1)}^-(\text{int } K) = (\frac{1}{2}, 1) \times (0, 1)^{n-1}$

auch von denen der Form $\gamma_k^-(\text{int } K)$ mit $k \in \mathbb{Z}^n$. Also ist die Projektion $\text{pr}_{\Gamma_n} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n/\Gamma_n$ auf $\text{int } K$ injektiv und der Quotient $M_n := \mathbb{R}^n/\Gamma_n$ ist kompakt als stetiges Bild von K . pr_{Γ_n} ist also eine normale Projektion im Sinne von Definition 3.1.1.

Man kann sich die Projektion auch folgendermaßen vorstellen: Sei $\text{pr}_{\mathbb{Z}^n} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n = T^n$ die Projektion auf den n -dimensionalen Torus und $\text{pr}_2 : T^n \rightarrow M_n$ die Projektion der Gruppenwirkung von \mathbb{Z}^2 auf T^n durch die Spiegelung $x + \mathbb{Z}^n \mapsto -x + \mathbb{Z}^n$. Dann kommutiert das folgende Diagramm.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\text{pr}_{\Gamma_n}} & M_n \\ \text{pr}_{\mathbb{Z}^n} \downarrow & \nearrow \text{pr}_2 & \\ T^n & & \end{array} \quad (5.12)$$

Jede lineare Abbildung des \mathbb{R}^n , die das Punktgitter \mathbb{Z}^n invariant lässt, respektiert die Orbits von Γ_n , denn für $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ gilt

$$A\gamma_k^\pm(x) = A(k \pm x) = Ak \pm Ax = \gamma_{Ak}^\pm(Ax). \quad (5.13)$$

Daher induziert jede solche lineare Abbildung eine Abbildung $F_A : M_n \rightarrow M_n$, so dass $F_A \circ \text{pr}_{\Gamma_n} = \text{pr}_{\Gamma_n} \circ A$. Sind die Eigenwerte von A dem Betrage nach größer als 1, so ist A in einer geeigneten Metrik global expandierend auf dem \mathbb{R}^n (siehe Beispiel 3.4.28) und F_A in der zugehörigen Quotientenmetrik auf M_n quasi-expandierend.

\mathbb{Z}^n ist in Γ_n als Untergruppe $\{\gamma_k^+\}_{k \in \mathbb{Z}^n}$ eingebettet. Ist also φ ein Automorphismus von Γ_n , so muss $H := \varphi(\{\gamma_k^+\})$ wieder eine Untergruppe von Γ_n sein, die isomorph zu \mathbb{Z}^n ist. Jede Untergruppe dieser Art ist in $\{\gamma_k^+\}$ enthalten, da die Elemente γ_k^- , $k \in \mathbb{Z}^n$, alle von Ordnung 2 sind, denn $\gamma_k^-(\gamma_k^-(x)) = -(-x + k) + k = x$. $\varphi(\mathbb{Z}^n)$ kann aber wegen der Surjektivität von φ keine echte Untergruppe von $\{\gamma_k^+\}$ sein. Folglich ist φ von folgender Gestalt.

$$\varphi(\gamma_k^\pm) = \gamma_{Ak}^\pm \quad \text{mit } A \in \text{Aut}(\mathbb{Z}^n).$$

Das Konjugationsproblem in $\text{Aut}(\Gamma_n)$ reduziert sich also auf das Konjugationsproblem in $\text{Aut}(\mathbb{Z}^n)$. Zu einem vorgegebenen Automorphismus $\varphi \in \text{Aut}(\Gamma_n)$ existiert folglich stets ein Homöomorphismus $h : M_n \rightarrow M_n$ mit einer Liftung \tilde{h} , die φ induziert, nämlich die Projektion einer \mathbb{Z} -linearen Abbildung (siehe (5.13)). Also reduziert sich hier das Problem der topologischen Konjugiertheit von liftbaren quasi-expandierenden Abbildungen vollständig auf das Konjugationsproblem in $\text{Aut}(\mathbb{Z}^n)$. In Dimension 1 sind die von linearen Abbildungen induzierten Abbildungen auf $[-1, 1]$ gerade die *Tschebyscheff-Polynome* $P_n(x) = \cos(n \arccos(x))$, denn

$$P_n(\pi(x)) = P_n(\cos(2\pi x)) = \cos(n \arccos(\cos(2\pi x))) = \cos(2\pi(nx)) = \pi(nx).$$

Nun wollen wir uns den Fall $n = 2$ genauer ansehen. \mathbb{R}^2 können wir mit \mathbb{C} identifizieren. Es stellt sich heraus, dass $M_2 = \mathbb{C}/\Gamma_2$ homöomorph zur Sphäre bzw. zur Riemannschen Zahlenkugel $\overline{\mathbb{C}}$ ist. Dies kann man sich geometrisch folgendermaßen klar machen: Man betrachtet den Fundamentalbereich $K = [0, \frac{1}{2}] \times [0, 1]$ und überlegt sich, welche Punkte auf dem Rand von K durch die Wirkung von Γ_2 identifiziert werden. Folgendes Bild soll dies veranschaulichen.

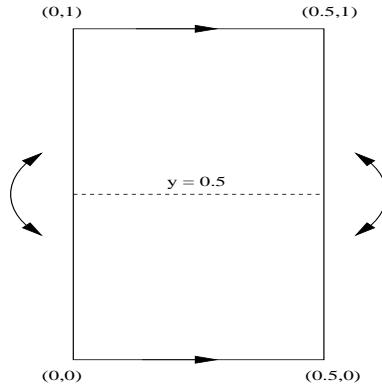


Abbildung 5.5: Die 2-Sphäre als Orbitraum unter der Wirkung von Γ_2 .

Durch die Identifizierung der unteren mit der oberen Seite des Rechtecks erhält man eine Art Röhre (kompakter Zylinder). Die Identifizierungen auf der linken und auf der rechten Seite des Rechtecks kann man sich dann so vorstellen, dass man die beiden Öffnungen dieser Röhre zuklebt. Der so entstehende Raum ist offensichtlich homöomorph zur 2-Sphäre. Um dies auch analytisch zu beweisen, führen wir die sog. *Weierstraß'sche \wp -Funktion* ein:

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \mathbb{Z} \oplus i\mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right), \quad \wp : \mathbb{C} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}.$$

Bei \wp handelt es sich um eine meromorphe Funktion, die auf $\mathbb{Z} \oplus i\mathbb{Z}$ Pole 2. Ordnung hat und auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \oplus i\mathbb{Z}$ holomorph ist. Ferner gilt $\wp \circ \gamma = \wp$ für alle $\gamma \in \Gamma_2$. Einen Beweis dazu findet man in [Lng 87, S. 8]. Bekanntlich sind nichtkonstante meromorphe Funktionen offen. Als stetiges Bild des kompakten Fundamentalbereichs K ist $\wp(\mathbb{C})$ also sowohl offen als auch abgeschlossen in $\overline{\mathbb{C}}$. Daraus folgt die Surjektivität von \wp . Sei nun $\gamma \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ eine beliebige Decktransformation von \wp , d. h. es gilt $\wp = \wp \circ \gamma$. Dann muss γ biholomorph sein (die Gleichung $\wp = \wp \circ \gamma$ lässt sich lokal fast überall nach γ auflösen), also gilt $\gamma(z) \equiv az + b$ mit $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $b \in \mathbb{C}$. Ferner muss γ die Polmenge von \wp , also das Punktgitter $\mathbb{Z} \oplus i\mathbb{Z}$, in sich abbilden. Daraus ergibt sich $a \in \mathbb{Z} \oplus i\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ und $b \in \mathbb{Z} \oplus i\mathbb{Z}$. Mit $\gamma(z) = az + b$ ist auch die durch $\gamma'(z) := \gamma'_{-b} \circ \gamma(z) = az$ definierte Abbildung γ' ein Element von $D(\wp)$. Da mit $\gamma' \in D(\wp)$ auch $(\gamma')^{-1} \in D(\wp)$ gelten muss, folgt $|a| = 1$ und damit $a \in \{\pm i, \pm 1\}$. Wir nehmen o. B. d. A. an, dass $a = i$ gilt. Dann folgt $\wp(z) = \wp(iz)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und folglich $\wp''(z) = -\wp''(iz)$:

$$\wp''(z) = 6 \sum_{\omega \in \mathbb{Z} \oplus i\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-\omega)^4} = -6 \sum_{\omega \in \mathbb{Z} \oplus i\mathbb{Z}} \frac{1}{(iz-\omega)^4} = -\wp''(iz).$$

Da aber durch Umsortierung der Reihenglieder

$$\sum_{\omega \in \mathbb{Z} \oplus i\mathbb{Z}} \frac{1}{(iz-\omega)^4} = \sum_{\omega \in \mathbb{Z} \oplus i\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-\omega)^4}.$$

folgt, ergibt sich $\wp''(z) \equiv -\wp''(z)$ im Widerspruch dazu, dass \wp kein quadratisches Polynom ist. Wir haben also gezeigt, dass $D(\wp) = \Gamma_2$ gilt. Dies liefert

eine wohldefinierte holomorphe Abbildung $\hat{\varphi} : T^2 \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$, $z + (\mathbb{Z} \oplus i\mathbb{Z}) \mapsto \varphi(z)$, die genau einen Pol (2. Ordnung) besitzt. Also hat jeder Punkt $w = \varphi(z) \in \overline{\mathbb{C}}$ mit Vielfachheit gezählt genau 2 Urbilder unter $\hat{\varphi}$. Dies sind die Punkte $z + (\mathbb{Z} \oplus i\mathbb{Z})$ und $-z + (\mathbb{Z} \oplus i\mathbb{Z})$. Damit ist klar, dass Γ_2 transitiv auf den Fasern von φ operiert. Also ist φ eine normale Projektion, und mit Satz 3.1.3 folgt, dass durch

$$\varphi : M_2 \rightarrow \overline{\mathbb{C}}, \quad [z] \mapsto \varphi(z),$$

ein Homöomorphismus gegeben ist. Für jede komplex lineare Abbildung $z \mapsto \alpha z$ mit $\alpha \in \mathbb{Z} \oplus i\mathbb{Z}$ existiert eine rationale Funktion $F_\alpha : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$, so dass $\varphi(\alpha z) = F_\alpha(\varphi(z))$ gilt. Dies ist klar, da die \mathbb{Z} -linearen Abbildungen die Orbits der Wirkung von Γ_2 respektieren und da φ meromorph ist.

Für $|\alpha| > 1$ ist die Julia-Menge von F_α die ganze Riemannsche Zahlenkugel. Dies sieht man am einfachsten folgendermaßen: Ist $U \subset \overline{\mathbb{C}}$ eine beliebige nichtleere offene Menge, so ist auch $\varphi^{-1}(U) \subset \mathbb{C}$ offen und nichtleer. $\alpha^k \varphi^{-1}(U)$ enthält für hinreichend großes k einen Fundamentalbereich von φ , wenn $|\alpha| > 1$ gilt. Damit folgt

$$F_\alpha^k(U) = F_\alpha^k(\varphi(\varphi^{-1}(U))) = \varphi(\alpha^k \varphi^{-1}(U)) = \overline{\mathbb{C}}.$$

Daher ist $F_\alpha : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ topologisch exakt und lässt folglich keine invariante nichtleere offene Menge außer $\overline{\mathbb{C}}$ zu. Also ist die Fatou-Menge von F_α leer und damit folgt $J(F_\alpha) = \overline{\mathbb{C}}$.

Der Grad der rationalen Funktion F_α ist $|\alpha|^2$. Um dies einzusehen, betrachte man das Diagramm (5.12). Projiziert man $z \mapsto \alpha z$ mit $\alpha = a + ib$ zunächst auf den Torus $T^2 = S^1 \times S^1$, so erhält man den linearen Torusendomorphismus $E_\alpha : (z, w) \mapsto (z^a w^{-b}, z^b w^a)$, der eine $|\alpha|^2$ -blättrige Überlagerung ist. Nach [Kow 03, Satz 11.5.7, S. 328] lässt sich nämlich die Matrix $A := \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ im folgenden Sinne diagonalisieren.⁶

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} c & \\ & d \end{pmatrix} P, \quad Q, P \in \text{Aut}(\mathbb{Z}^2), \quad c, d \in \mathbb{Z}.$$

Damit ist $|\alpha|^2 = |\det A| = |\det Q||cd||\det P| = |cd|$, da $|\det Q| = |\det P| = 1$. Es folgt außerdem $E_\alpha = E_Q \circ E_{\text{diag}(c,d)} \circ E_P$. Da E_Q und E_P nach Satz 3.1.8 (c) Homöomorphismen sind, und $E_{\text{diag}(c,d)}$ offensichtlich eine $|cd|$ -blättrige Überlagerung, ist E_α eine $|\alpha|^2$ -blättrige Überlagerung. Nun betrachte man das folgende Diagramm.

$$\begin{array}{ccc} T_2 & \xrightarrow{E_\alpha} & T_2 \\ \text{pr}_2 \downarrow & & \downarrow \text{pr}_2 \\ M_2 & \xrightarrow{F_\alpha} & M_2 \end{array}$$

Für jedes $z \in M_2$ gilt also $\#\text{pr}_2^{-1}(F_\alpha^{-1}(z)) = \#E_\alpha^{-1}(\text{pr}_2^{-1}(z))$. Für alle $z \in M_2 \setminus \{\text{pr}_2(1, 1), \text{pr}_2(1, -1), \text{pr}_2(-1, 1), \text{pr}_2(-1, -1)\}$ besteht $\text{pr}_2^{-1}(z)$ aus genau zwei und damit $E_\alpha^{-1}(\text{pr}_2^{-1}(z))$ aus $2|\alpha|^2$ Punkten. Dies ist klar, da die

⁶Es handelt sich um die *Smith-Normalform* für Homomorphismen von Hauptidealringen.

Projektion in der Darstellung $T^2 = S^1 \times S^1$ durch $\text{pr}_2(z, w) = \{(z, w), (\bar{z}, \bar{w})\}$ gegeben ist. Folglich besteht auch $\text{pr}_2^{-1}(F_\alpha^{-1}(z))$ aus $2|\alpha|^2$ Punkten. Damit folgt $\#F_\alpha^{-1}(z) = |\alpha|^2$ für alle $z \in M_2 \setminus \{\text{pr}_2(\pm 1, \pm 1)\}$. Also ist $\deg(F_\alpha) = |\alpha|^2$. Zwei Abbildungen $F_\alpha, F_\beta : M_2 \rightarrow M_2$ mit $\alpha = a_1 + ia_2$ und $\beta = b_1 + ib_2$ sind genau dann durch einen liftbaren Homöomorphismus konjugiert, wenn $a_1 = b_1$ und $a_2 = \pm b_2$ gilt. Ist nämlich eine Gleichung der Form

$$C \begin{pmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & -b_2 \\ b_2 & b_1 \end{pmatrix} C, \quad C \in \text{Aut}(\mathbb{Z}^2),$$

erfüllt, so folgt insbesondere $\text{tr } \alpha = 2a_1 = 2b_1 = \text{tr } \beta$ und $\det \alpha = a_1^2 + a_2^2 = b_1^2 + b_2^2 = \det \beta$, also $a_1 = b_1$ und $a_2 = \pm b_2$. Umgekehrt gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ -a_2 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

◊

Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurden viele Probleme nur ansatzweise und unbefriedigend gelöst. Wir wollen deshalb die Arbeit mit einer Liste von offenen Problemen und weiteren Fragestellungen abschließen, die sich unmittelbar aus den bewiesenen Resultaten ergeben.

- Im dritten Kapitel haben wir bewiesen, dass ein kompakter Längenraum, der eine offene expandierende Abbildung zulässt, eine topologische Mannigfaltigkeit ist, falls er eine offene Teilmenge mit nach unten beschränkter Krümmung besitzt. Es konnte jedoch nicht geklärt werden, ob es einen Raum gibt, der diese Voraussetzung nicht erfüllt. Eine weitere Fragestellung wäre, ob sich diejenigen topologischen Mannigfaltigkeiten, die expandierende Abbildungen zulassen, wie im differenzierbaren Fall (siehe [Grm 81]) klassifizieren lassen.
- Der in Kapitel 4 eingeführte Begriff der kombinatorischen Äquivalenz für stückweise monotone Intervallabbildungen wurde mit dem in [Mel 92] verglichen. Es existieren in der Literatur jedoch noch weitere Definitionen von kombinatorischer Äquivalenz für andere Typen von Abbildungen (z. B. für verzweigte Überlagerungen der 2-Sphäre), die wir nicht betrachtet haben.
- Im fünften Kapitel wurde nur angedeutet und anhand von Beispielen nahegelegt, dass sich der Perron-Frobenius-Operator zum Nachweis von expandierenden Abbildungen verwenden lässt. Dies wurde jedoch nicht bewiesen.
- Bei den im fünften Kapitel bewiesenen Verallgemeinerungen des Konjugationsresultats von M. Shub wurde das Konjugationsproblem nicht vollständig auf ein algebraisches Problem zurückgeführt, wie das beim ursprünglichen Resultat getan wurde. Um dies etwa für das verallgemeinerte Shub-Kriterium 5.3.10 zu tun, müsste man klären, ob es zu jedem Automorphismus φ der Decktransformationsgruppe Γ einer universellen Orbifaltigkeitsüberlagerung $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ einen Homöomorphismus $\tilde{h} \in \mathcal{H}(\tilde{M})$ gibt mit $\tilde{h} \circ \gamma \equiv \varphi(\gamma) \circ \tilde{h}$. Außerdem wurde im Fall der quasi-expandierenden Abbildungen auf Orbifaltigkeiten nicht auf die Stabilitätsfrage eingegangen.
- Dass man Pullback-Operatoren auch verwenden kann, um die Konjugiertheit von Abbildungen mit Attraktoren nachzuweisen, wurde nur im Fall von Intervallabbildungen anhand eines Beispiels gezeigt. Es wäre schön, wenn man hierfür auch allgemeinere (insbesondere höherdimensionale) Beispiele bzw. Resultate hätte.

Anhang

Dieser Anhang enthält die meisten Definitionen und Resultate, die in der vorliegenden Arbeit verwendet werden. Er umfasst insbesondere die Gebiete *mengentheoretische Topologie*, *Überlagerungstheorie*, *Längenräume* und *Orbifaltigkeiten*. Nicht aufgeführt sind die insbesondere in Kapitel 5 verwendeten Resultate aus der *Maßtheorie*, der *Riemannschen Geometrie* und der *komplexen Dynamik*.

A.1 Mengentheoretische Topologie

Topologische Räume

A.1.1 Definition:

Ein **topologischer Raum** (oder kurz **Raum**) ist ein Paar (X, \mathcal{T}) , bestehend aus einer nichtleeren Menge X und einer **Topologie** \mathcal{T} auf X . Das ist ein Mengensystem $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ mit den folgenden Eigenschaften:

- (1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.
- (2) $O_1, \dots, O_n \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n O_i \in \mathcal{T}$.
- (3) $O_i \in \mathcal{T}$ für alle $i \in I$ (I eine beliebige Indexmenge) $\Rightarrow \bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{T}$.

Die in \mathcal{T} enthaltenen Mengen nennt man die **offenen Mengen** von X , ihre Komplemente in X die **abgeschlossenen Mengen** von X . Statt (X, \mathcal{T}) schreibt man meist kurz X , falls aus dem Kontext hervorgeht, welche Topologie zu X gehört.

A.1.2 Definition:

Es sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum. Ein Mengensystem \mathcal{B} offener Teilmengen von X ist eine **Basis** der Topologie \mathcal{T} , falls jedes $O \in \mathcal{T}$ eine Vereinigung von Mengen aus \mathcal{B} ist. Ein Mengensystem \mathcal{S} von offenen Mengen heißt **Subbasis** der Topologie \mathcal{T} , falls jedes $O \in \mathcal{T}$ die Vereinigung endlicher Schnitte von Mengen aus \mathcal{S} ist.

A.1.3 Satz:

(vgl. [Mnk 75, S. 82])
Es sei X eine Menge und $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ ein System von Teilmengen von X , deren Vereinigung X ist. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Topologie $\mathcal{T}(\mathcal{S})$ auf

X , so dass \mathcal{S} eine Subbasis von $\mathcal{T}(\mathcal{S})$ ist. Man nennt diese auch die von \mathcal{S} erzeugte Topologie.

A.1.4 Definition:

Es sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum und $A \subset X$. Dann wird durch $\mathcal{T}(A) = \{O \cap A \mid O \in \mathcal{T}\}$ eine Topologie auf A definiert. $\mathcal{T}(A)$ heißt die (von X auf A induzierte) **Teilraumtopologie** und A zusammen mit dieser Topologie nennt man einen **Teilraum** von X .

A.1.5 Definition:

Es seien (X_j, \mathcal{T}_j) für alle $j \in J$ topologische Räume (J eine beliebige Indexmenge). Die **Produkttopologie** auf dem kartesischen Produkt $\prod_{j \in J} X_j$ der X_j wird erzeugt von der Subbasis $\{\text{pr}_j^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{T}_j, j \in J\}$, wobei $\text{pr}_j : \prod_{i \in J} X_i \rightarrow X_j$, definiert durch $\text{pr}_j : (x_i)_{i \in J} \mapsto x_j$, die **j -te Projektionsabbildung** und x_j die **j -te Koordinate** von $(x_i)_{i \in J}$ sei. $\prod_{j \in J} X_j$, ausgestattet mit dieser Topologie, heißt der **Produktraum** der X_j .

A.1.6 Definition:

Es sei (X, \mathcal{T}_X) ein topologischer Raum, Y eine Menge und $\pi : X \rightarrow Y$ eine Surjektion. Man definiert auf Y die **Quotiententopologie** $\mathcal{T}_Y := \{O \in \mathcal{P}(Y) \mid \pi^{-1}(O) \in \mathcal{T}_X\}$. Dann ist \mathcal{T}_Y eine Topologie und (Y, \mathcal{T}_Y) heißt der **Quotientenraum** von X bzgl. π . Ist insbesondere \sim eine Äquivalenzrelation auf X , $Y = \{[x] \mid x \in X\}$ die Menge der zugehörigen Äquivalenzklassen und $\pi : X \rightarrow Y$ die kanonische Projektion $x \mapsto [x]$, so schreiben wir für den Quotientenraum von X bzgl. π auch X/\sim .

A.1.7 Definition:

Es sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum und $x \in X$. Eine Menge $U \subset X$ ist eine **Umgebung** von x , falls eine offene Menge $O \in \mathcal{T}$ existiert mit $x \in O \subset U$. U heißt **offene Umgebung** von x , falls zusätzlich $U \in \mathcal{T}$ gilt.

A.1.8 Definition:

Ein topologischer Raum (X, \mathcal{T}) erfüllt das **erste Abzählbarkeitsaxiom**, falls jedes $x \in X$ eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt, d. h. falls es ein abzählbares Mengensystem \mathcal{U} bestehend aus offenen Umgebungen von x gibt, so dass jede Umgebung von x Obermenge eines $U \in \mathcal{U}$ ist. (X, \mathcal{T}) erfüllt das **zweite Abzählbarkeitsaxiom**, falls es eine abzählbare Basis der Topologie \mathcal{T} gibt.

A.1.9 Satz:

(vgl. [Mnk 75, Theorem 1.2, S. 191]) Ein Teilraum $A \subset X$ erfüllt das erste bzw. zweite Abzählbarkeitsaxiom, falls X das erste bzw. zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt.

A.1.10 Definition:

Es sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum und $A \subset X$. Das **Innere** oder der **offene Kern** $\text{int}(A) = \text{int}_{\mathcal{T}}(A)$ von A ist die Vereinigung aller in X offenen Teilmengen von A . Der **topologische Abschluss** $\text{cl}(A) = \text{cl}_{\mathcal{T}}(A)$ von A ist der Schnitt über alle in X abgeschlossenen Obermengen von A . Es gilt $\text{int}(A) \subset A \subset \text{cl}(A)$. Der **Rand** $\text{bd}(A) = \text{bd}_{\mathcal{T}}(A)$ von A ist definiert als $\text{bd}(A) = \text{cl}(A) \cap \text{cl}(X \setminus A)$.

Aus der Definition geht unmittelbar hervor: $\text{int}(A)$ ist stets offen, $\text{cl}(A)$ und $\text{bd}(A)$ sind stets abgeschlossen. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt **dicht in X** , wenn $\text{cl}_{\mathcal{T}}(A) = X$. Ein Punkt $x \in X$ heißt **Häufungspunkt** der Menge A , falls $V \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$ für alle Umgebungen V von x . Ist $x \in A$, so heißt x **isolierter Punkt** von A , wenn x kein Häufungspunkt von A ist. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt **diskret**, wenn zu jedem Punkt $x \in A$ eine Umgebung U von x existiert mit $U \cap A = \{x\}$.

A.1.11 Satz:

Es sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum, $x \in X$ und $A \subset X$. Dann gilt:

- (a) $x \in \text{cl}(A)$ genau dann, wenn $A \cap U \neq \emptyset$ für alle Umgebungen U von x (vgl. [Mnk 75, Theorem 6.5, S. 95]).
- (b) Erfüllt X das erste Abzählbarkeitsaxiom, dann ist $x \in \text{cl}(A)$ genau dann, wenn es eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ gibt mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ (vgl. [Mnk 75, Theorem 1.1, S. 190]).
- (c) A ist abgeschlossen genau dann, wenn jeder Häufungspunkt von A in A liegt (vgl. [Mnk 75, Cor. 6.7, S. 97]).

Folgen und Stetigkeit

A.1.12 Definition:

Es sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum. Eine **Folge** in X ist eine Abbildung $\mathbb{N} \rightarrow X$, $n \mapsto x_n$, und wird auch mit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bezeichnet. Eine **Teilfolge** von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, so dass $y_n = x_{m(n)}$ mit einer streng monoton wachsenden Abbildung $m : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ gilt. Eine solche Teilfolge wird dann auch mit $(x_{m_n})_{n \in \mathbb{N}}$ bezeichnet. Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt **konvergent mit Grenzwert** $x \in X$, in Zeichen $x = \mathcal{T}\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ oder kurz $x = \mathcal{T}\text{-}\lim x_n$, falls für jede Umgebung U von x ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $x_n \in U$ gilt für alle $n \geq n_0$. Ein Punkt $x \in X$ heißt **Häufungswert** der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, falls es eine konvergente Teilfolge $(x_{m_n})_{n \in \mathbb{N}}$ mit Grenzwert x gibt.

A.1.13 Definition:

Es seien (X, \mathcal{T}_X) und (Y, \mathcal{T}_Y) topologische Räume. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt **folgenstetig**, wenn für jede konvergente Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ mit Grenzwert $x \in X$ die Folge $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}} \subset Y$ gegen $f(x)$ konvergiert.

A.1.14 Definition:

Es seien (X, \mathcal{T}_X) und (Y, \mathcal{T}_Y) topologische Räume. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt **stetig**, falls $f^{-1}(O) \in \mathcal{T}_X$ für alle $O \in \mathcal{T}_Y$ gilt. Ist zudem f invertierbar und ist auch die Umkehrabbildung $f^{-1} : Y \rightarrow X$ stetig, so nennt man f einen **Homöomorphismus**. X und Y nennt man **homöomorph**, falls es einen Homöomorphismus $h : X \rightarrow Y$ gibt. f heißt **lokaler Homöomorphismus**, wenn es zu jedem Punkt $x \in X$ offene Umgebungen U von x und V von $y = f(x)$ gibt, so dass $f|_U : U \rightarrow V$ ein Homöomorphismus ist.

A.1.15 Definition:

Eine stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt **offen** bzw. **abgeschlossen**, wenn für

jede offene bzw. abgeschlossene Menge $A \subset X$ auch $f(A)$ offen bzw. abgeschlossen ist.

A.1.16 Satz:

Es seien (X, \mathcal{T}_X) und (Y, \mathcal{T}_Y) topologische Räume und $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

- (a) f ist stetig.
- (b) $f^{-1}(O) \in \mathcal{T}_X$ für alle Elemente O einer Subbasis von \mathcal{T}_Y (vgl. [Dgy 66, Theorem 8.3, S. 79]).
- (c) $f^{-1}(C)$ ist abgeschlossen für alle abgeschlossenen $C \subset Y$ (vgl. [Mnk 75, Theorem 7.1, S. 103]).
- (d) $f(\text{cl}(A)) \subset \text{cl}(f(A))$ für alle $A \subset X$ (vgl. [Mnk 75, Theorem 7.1, S. 103]).
- (e) Für alle $x \in X$ und jede Umgebung V von $f(x)$ gibt es eine Umgebung U von x , so dass $f(U) \subset V$ (vgl. [Dgy 66, Theorem 8.3, S. 79]).
- (f) Falls X das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt: f ist folgenstetig (vgl. [Mnk 75, Theorem 1.1, S. 190]).

Trennungsaxiome, Kompaktheit und Zusammenhang

A.1.17 Definition:

Es sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum. X heißt **hausdorffsch** oder **Hausdorffraum**, falls es zu je zwei verschiedenen Punkten $x, y \in X$ disjunkte Umgebungen U von x und V von y gibt. X heißt **regulär**, falls es für jede abgeschlossene Teilmenge $A \subset X$ und jeden Punkt $x \in X \setminus A$ offene disjunkte Mengen $U, V \in \mathcal{T}$ gibt mit $A \subset U$ und $x \in V$. X heißt **normal**, falls es für je zwei disjunkte abgeschlossene Teilmengen $A, B \subset X$ offene disjunkte Mengen $U, V \in \mathcal{T}$ gibt mit $A \subset U$ und $B \subset V$.

A.1.18 Satz:

Für jeden topologischen Raum X gilt:

- (a) Ist X hausdorffsch, so auch jeder Teilraum von X (vgl. [Mnk 75, Theorem 2.2, S. 197]).
- (b) Ist X hausdorffsch, so gilt: X ist genau dann regulär, wenn es zu jeder Umgebung U von $x \in X$ eine offene Menge V gibt mit $x \in V \subset \text{cl}(V) \subset U$ (vgl. [Mnk 75, Lemma 2.1, S. 196]).
- (c) Ist X hausdorffsch, so gilt: X ist genau dann normal, wenn es zu jeder abgeschlossenen Menge A und jeder offenen Menge U mit $A \subset U$ eine offene Menge V gibt mit $A \subset V \subset \text{cl}(V) \subset U$ (vgl. [Mnk 75, Lemma 2.1, S. 196]).

A.1.19 Definition:

Ein Mengensystem \mathcal{U} von Teilmengen eines topologischen Raumes X heißt **Überdeckung** von X , falls $X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$. Die Überdeckung \mathcal{U} heißt **offen**, falls jedes $U \in \mathcal{U}$ offen ist.

A.1.20 Definition:

Ein topologischer Raum X heißt **kompakt**, falls jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung besitzt. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt kompakt, falls sie als Teilraum von X kompakt ist. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt **relativ kompakt**, falls ihr Abschluss $\text{cl}(A) \subset X$ kompakt ist. Ein topologischer Raum X heißt **lokal kompakt**, falls für jedes $x \in X$ und jede Umgebung U von x eine kompakte Umgebung $K \subset U$ von x existiert.

A.1.21 Satz:

Es sei X ein kompakter topologischer Raum. Dann gilt:

- (a) Jeder abgeschlossene Teilraum $A \subset X$ ist kompakt (vgl. [Mnk 75, Theorem 5.2, S. 165]).
- (b) Ist Y ein weiterer topologischer Raum und $f : X \rightarrow Y$ stetig, so ist $f(X)$ ein kompakter Teilraum von Y (vgl. [Mnk 75, Theorem 5.5, S. 167]).
- (c) Es sei $\{C_i\}_{i \in I}$ eine Familie abgeschlossener Teilmengen von X mit der Eigenschaft $\bigcap_{i \in J} C_i \neq \emptyset$ für jede endliche Menge $J \subset I$. Dann gilt auch $\bigcap_{i \in I} C_i \neq \emptyset$ (vgl. [Mnk 75, Cor. 5.10, S. 171]).

A.1.22 Satz:

Sei X ein kompakter Hausdorffraum. Dann gilt:

- (a) X ist normal (vgl. [Mnk 75, Theorem 2.4, S. 198]).
- (b) X ist metrisierbar, wenn X das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt (vgl. [Mnk 75, Theorem 4.1, S. 217]).
- (c) Eine Teilmenge $A \subset X$ ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen ist (vgl. [Mnk 75, Theorem 5.2/5.3, S. 165/166]).
- (d) Jede stetige Bijektion $h : X \rightarrow Y$ auf einen Hausdorffraum Y ist ein Homöomorphismus (vgl. [Mnk 75, Theorem 5.6, S. 167]).

A.1.23 Satz: (vgl. [Mnk 75, Theorem 1.1, S. 232])

Es sei (X_j, \mathcal{T}_j) für jedes $j \in J$ ein kompakter topologischer Raum (J eine beliebige Indexmenge). Dann ist auch der Produktraum $\prod_{j \in J} X_j$ kompakt.

A.1.24 Satz: (vgl. [Mnk 75, Theorem 6.4, S. 175])

Ist X kompakt und $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so nimmt f globale Extrema auf X an, d. h. es existieren $a, b \in X$, so dass $f(b) \leq f(x) \leq f(a)$ für alle $x \in X$.

A.1.25 Definition:

Ein topologischer Raum X heißt **zusammenhängend**, falls er sich nicht in zwei offene, disjunkte und nichtleere Teilmengen zerlegen lässt, d. h. X ist genau dann zusammenhängend, wenn X und \emptyset die einzigen Teilmengen von X sind, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt **zusammenhängend**, wenn sie als Teilraum von X zusammenhängend ist. Die Relation „ $x \sim y$ genau dann, wenn es eine zusammenhängende Teilmenge $A \subset X$ mit $x, y \in A$ gibt“ ist eine Äquivalenzrelation. Die zugehörigen Äquivalenzklassen nennt man die **Zusammenhangskomponenten** von X . Sind

alle Zusammenhangskomponenten von X einpunktig, so heißt X **total unzusammenhängend**. Einen Raum X mit der Eigenschaft, dass jede Umgebung eines Punktes eine zusammenhängende Umgebung enthält, nennt man **lokal zusammenhängend**.

A.1.26 Satz:

Für jeden topologischen Raum X gilt:

- (a) Die Zusammenhangskomponenten von X sind zusammenhängend und abgeschlossen (vgl. [Dgy 66, Def. 3.1, Theorem 3.2, S. 111]).
- (b) Ist $f : X \rightarrow Y$ stetig und X zusammenhängend, so ist auch $f(X)$ als Teilraum von Y zusammenhängend (vgl. [Mnk 75, Theorem 1.5, S. 149]).

A.1.27 Definition:

Ein topologischer Raum X heißt **wegzusammenhängend**, falls zu je zwei Punkten $x, y \in X$ ein Weg $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ (d. h. eine stetige Abbildung) existiert mit $\alpha(0) = x$ und $\alpha(1) = y$. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt **wegzusammenhängend**, falls sie als Teilraum von X wegzusammenhängend ist. X heißt **lokal wegzusammenhängend**, falls jede Umgebung eines Punktes $x \in X$ eine wegzusammenhängende Umgebung enthält.

A.1.28 Satz:

Es sei X ein topologischer Raum. Dann gilt:

- (a) Ist X wegzusammenhängend, so ist X zusammenhängend (vgl. [Dgy 66, Theorem 5.3, S. 115]).
- (b) Ist $f : X \rightarrow Y$ stetig und X wegzusammenhängend, so ist $f(X)$ wegzusammenhängend (vgl. [Dgy 66], S. 115).

Metrische Räume

A.1.29 Definition:

Ein Paar (X, d) mit einer nichtleeren Menge X und einer Abbildung $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ heißt **metrischer Raum**, falls folgende Axiome erfüllt sind.

- (1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
- (2) $d(x, y) = d(y, x)$ für alle $x, y \in X$.
- (3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ für alle $x, y, z \in X$.

Die Abbildung d nennt man auch **Metrik**. Zu jedem $a \in X$ und $\varepsilon > 0$ definiert man den **ε -Ball** um a durch $B(a, \varepsilon) := \{x \in X \mid d(x, a) < \varepsilon\}$. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt **offen**, wenn zu jedem Punkt $a \in A$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass $B(a, \varepsilon) \subset A$ gilt.

A.1.30 Satz:

Jeder metrische Raum (X, d) wird in kanonischer Weise zu einem topologischen Raum, indem man mit Hilfe der Metrik d eine Topologie \mathcal{T}_d auf X definiert, deren Elemente gerade die offenen Mengen von X im Sinne von Definition A.1.29 sind. Eine Basis dieser Topologie ist z. B. die Menge aller ε -Bälle.

A.1.31 Satz: (vgl. [Bur 01, Ex. 1.4.10, S. 10])

Die Metrik $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ eines beliebigen metrischen Raumes (X, d) ist stetig, wenn man $X \times X$ mit der Produkttopologie und \mathbb{R} mit der euklidischen Topologie ausstaltet.

A.1.32 Definition:

Ein metrischer Raum (X, d) heißt **beschränkt**, falls ein $\varepsilon > 0$ und ein $x \in X$ existieren mit $X = B(x, \varepsilon)$.

A.1.33 Definition:

Ist (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$ eine nichtleere beschränkte Teilmenge von X so definieren wir den **Durchmesser** von A durch $\text{diam } A := \text{diam}_d A := \sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\}$.

A.1.34 Satz:

Für jeden metrischen Raum (X, d) gilt:

- (a) (X, \mathcal{T}_d) ist hausdorffsch, regulär und normal (vgl. [Mnk 75, Theorem 2.3, S. 198]).
- (b) Der Raum (X, \mathcal{T}_d) ist genau dann kompakt, wenn jede Folge in X einen Häufungswert besitzt (vgl. [Mnk 75, Theorem 7.4, S. 181]).
- (c) Ist ein Teilraum $A \subset X$ kompakt, so ist er abgeschlossen und beschränkt (vgl. [Dgy 66, 4.2, S. 233]).

A.1.35 Definition:

Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung von metrischen Räumen (X, d_X) und (Y, d_Y) . Dann heißt f **gleichmäßig stetig**, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in X : d_X(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon.$$

f heißt **Lipschitz-stetig** mit **Lipschitz-Konstante** $L \geq 0$, falls

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq L d_X(x, y) \quad \text{für alle } x, y \in X.$$

f heißt **Kontraktion** oder **kontraktiv**, falls f Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L < 1$ ist.

A.1.36 Satz: (vgl. [Dgy 66, Theorem 4.6, S. 234])

Sind X und Y metrische Räume und X kompakt, so ist jede stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ gleichmäßig stetig.

A.1.37 Definition:

Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ in einem metrischen Raum (X, d) heißt **Cauchy-Folge**, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq n_0 : d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Der Raum (X, d) heißt **vollständig**, falls jede Cauchy-Folge in X gegen einen Punkt in X konvergiert.

A.1.38 Satz:

Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann gilt:

- (a) Ist X kompakt, so ist X vollständig und separabel.
- (b) Ist X vollständig, so ist X Baire, d. h. der Durchschnitt abzählbar vieler offener und dichter Teilmengen ist dicht in X (vgl. [Dgy 66, Theorem 4.1, S. 299]).
- (c) X ist genau dann separabel, wenn X das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt (vgl. [Dgy 66, Theorem 5.6, S. 187]).

A.1.39 Definition:

Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Erweiterung von (X, d) , d. h. ein metrischer Raum (\tilde{X}, \tilde{d}) mit $X \subset \tilde{X}$ und $d = \tilde{d}|_{X \times X}$ heißt **Vervollständigung** von (X, d) , falls (\tilde{X}, \tilde{d}) vollständig ist und X dicht in \tilde{X} liegt.

A.1.40 Satz: (vgl. [Bur 01, Prop. 1.5.5, S. 11])

Ist (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $A \subset X$, so ist $\text{cl}(A)$ als Teilraum von X eine Vervollständigung von (A, d) .

A.1.41 Satz: (vgl. [Mnk 75, Ex. 2, S. 269])

Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und $f : X \rightarrow Y$ gleichmäßig stetig. Sind dann $(\hat{X}, d_{\hat{X}})$ und $(\hat{Y}, d_{\hat{Y}})$ Vervollständigungen von (X, d_X) und (Y, d_Y) , so existiert genau eine Fortsetzung von f zu einer (gleichmäßig) stetigen Abbildung $\hat{f} : \hat{X} \rightarrow \hat{Y}$. Ist f Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L \geq 0$, so auch \hat{f} .

A.1.42 Satz: (vgl. [Mnk 75, Lemma 7.1, S. 179])

Es sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum. Dann existiert zu jeder offenen Überdeckung \mathcal{U} von X ein $\varepsilon > 0$ („Lebesgue-Zahl“), so dass für jedes $x \in X$ ein $U \in \mathcal{U}$ existiert mit $B(x, \varepsilon) \subset U$.

A.1.43 Definition:

Sei (X, d) ein metrischer Raum und δ eine nichtnegative reelle Zahl. Für eine endliche oder abzählbare Überdeckung $\{S_i\}_{i \in I}$ von X definiert man:

$$w_\delta(\{S_i\}_{i \in I}) := \sum_{i \in I} (\text{diam } S_i)^\delta. \quad (\text{A.14})$$

Für jedes $\varepsilon > 0$ ist $\mu_{\delta, \varepsilon}(X)$ definiert durch

$$\mu_{\delta, \varepsilon}(X) := \inf \{w_\delta(\{S_i\}_{i \in I}) \mid \text{diam}(S_i) < \varepsilon \text{ für alle } i \in I\},$$

wobei $\inf \emptyset = \infty$. Das **δ -dimensionale Hausdorffmaß** von X ist definiert durch

$$\mu_\delta(X) := C(\delta) \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu_{\delta, \varepsilon}(X),$$

wobei $C(\delta)$ eine positive Normierungskonstante ist. Ferner setzt man $\mu_\delta(\emptyset) = 0$ für alle $\delta \geq 0$.

A.1.44 Satz und Definition: (vgl. [Bur 01, Theorem 1.7.16, S. 22])

Für jeden metrischen Raum X existiert ein $\delta_0 \in [0, \infty]$, so dass $\mu_\delta(X) = 0$ für alle $\delta > \delta_0$ und $\mu_\delta(X) = \infty$ für alle $\delta < \delta_0$. Die Zahl δ_0 heißt die **Hausdorff-dimension** von X und wird mit $\dim_H X$ bezeichnet.

Topologische Gruppen

A.1.45 Definition:

Ein Tripel (X, \cdot, \mathcal{T}) heißt **topologische Gruppe**, wenn (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum und (X, \cdot) eine Gruppe ist, und wenn darüber hinaus die Abbildungen $X \times X \rightarrow G$, $(g, h) \mapsto gh$, und $X \rightarrow X$, $g \mapsto g^{-1}$, stetig sind.

A.1.46 Satz: (vgl. [Mnk 75, Ex. 3, S. 144])

Ist (X, \cdot, \mathcal{T}) eine topologische Gruppe und $g, h \in X$, so sind die Abbildungen $x \mapsto x^{-1}$, $x \mapsto gx$, $x \mapsto xh$ und $x \mapsto gxh$ Homöomorphismen auf X .

A.1.47 Satz:

Es seien (X, \cdot, \mathcal{T}) und $(X', \cdot, \mathcal{T}')$ topologische Gruppen. Dann gilt:

- (a) Jede Untergruppe $H \subset X$ ist eine topologische Gruppe in der von (X, \mathcal{T}) induzierten Teilraumtopologie.
- (b) Der Abschluss $\text{cl}_{\mathcal{T}}(H)$ einer Untergruppe $H \subset X$ ist eine Untergruppe von X und der Abschluss eines Normalteilers ist ein Normalteiler (vgl. [Oss 92, Satz 4.1.7, S. 120]).
- (c) Ein Gruppenhomomorphismus $g : X \rightarrow X'$ ist genau dann stetig, wenn er in einem Punkt $x \in X$ stetig ist (vgl. [Oss 92, Kor. 4.1.4, S. 119]).

A.1.48 Definition:

Es sei G eine topologische Gruppe und X ein topologischer Raum. Eine **Operation** von G auf X ist eine stetige Funktion

$$G \times X \rightarrow X, \quad \text{Schreibweise: } (g, x) \mapsto gx,$$

so dass für alle $g, g' \in G$ und $x \in X$ die folgenden Bedingungen gelten:

$$g(g'x) = (gg')x \quad \text{und} \quad 1x = x.$$

Für $x \in X$ heißt $Gx = \{gx \mid g \in G\} \subset X$ der **Orbit von x** . Zwei Punkte $x, x' \in X$ heißen **G -äquivalent**, wenn $Gx = Gx'$ ist, d. h. wenn es ein $g \in G$ mit $x = gx'$ gibt. Der Quotientenraum von X nach dieser Äquivalenzrelation heißt der **Orbitraum** und wird mit X/G bezeichnet. G operiert **frei** auf X , wenn $gx \neq x$ für alle $x \in X$ und $g \in G \setminus \{1\}$; das bedeutet, dass für $1 \neq g$ der Homöomorphismus $X \rightarrow X$, $x \mapsto gx$, keinen Fixpunkt hat.

A.2 Überlagerungstheorie

Die Fundamentalgruppe

A.2.1 Notation:

Mit I bezeichnen wir in diesem Abschnitt das Einheitsintervall $[0, 1]$ (ausge stattet mit der euklidischen Topologie). Unter einem Raum mit Basispunkt verstehen wir ein Paar (X, x_0) , wobei X ein topologischer Raum und $x_0 \in X$ ein Punkt ist. Eine basispunktterhaltende Abbildung $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ ist eine stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ mit $f(x_0) = y_0$.

A.2.2 Definition:

Zwei stetige Abbildungen $f, g : X \rightarrow Y$ heißen **homotop**, falls es eine stetige Abbildung $H : X \times I \rightarrow Y$, genannt **Homotopie**, gibt, so dass $f(x) = H(x, 0)$ und $g(x) = H(x, 1)$ für alle $x \in X$ gilt, in Zeichen: $f \simeq g$.

A.2.3 Definition: (vgl. [StZ 88, Def. 5.1.1, S. 100])

Es sei X ein topologischer Raum. Ein **Weg in X** ist eine stetige Abbildung $\alpha : I \rightarrow X$. Die Punkte $x_0 = \alpha(0)$ und $x_1 = \alpha(1)$ heißen **Anfangs-** und **Endpunkt** von α . Wir sagen auch: α ist ein Weg von x_0 nach x_1 . Im Fall $x_0 = x_1$ heißt α ein **geschlossener Weg mit Aufpunkt x_0** . Für $x \in X$ ist $c_x : I \rightarrow X$, $c_x(t) = x$ für alle $t \in U$, ein Weg in X ; er heißt der **konstante Weg bei x** .

A.2.4 Definition: (vgl. [StZ 88, Def. 5.1.2, S. 101])

Der zum Weg $\alpha : I \rightarrow X$ **inverse Weg** $\alpha^{-1} : I \rightarrow X$ ist definiert durch $\alpha^{-1}(t) = \alpha(1 - t)$. Zwei Wege $\alpha, \beta : I \rightarrow X$ heißen **aneinanderfügbar**, wenn $\alpha(1) = \beta(0)$. Dann ist der **Produktweg** $\alpha\beta : I \rightarrow X$ definiert durch $\alpha\beta(t) = \alpha(2t)$ für $t \in [0, \frac{1}{2}]$ und $\alpha\beta(t) = \beta(2t - 1)$ für $t \in [\frac{1}{2}, 1]$. Ist α ein geschlossener Weg, so ist $\alpha\alpha$ erklärt. Diesen Weg bezeichnen wir auch mit α^2 .

A.2.5 Definition: (vgl. [StZ 88, Def. 5.1.3, S. 101])

Zwei Wege $\alpha, \beta : I \rightarrow X$ heißen **homotop** (genauer: **homotop in X relativ der Endpunkte**), wenn $\alpha(0) = \beta(0)$ und $\alpha(1) = \beta(1)$ gilt und es eine stetige Abbildung $H : I^2 \rightarrow X$ gibt mit $H(s, 0) = \alpha(s)$, $H(s, 1) = \beta(s)$ für alle $s \in I$ und $H(0, t) = \alpha(0)$, $H(1, t) = \beta(1)$ für alle $t \in I$, in Zeichen: $\alpha \simeq \beta$. Die Äquivalenzklasse von α bzgl. dieser Relation wird mit $[\alpha]$ bezeichnet. Sie heißt die **Homotopieklass** von α . Ein geschlossener Weg α mit Aufpunkt x heißt **nullhomotop**, wenn $\alpha \simeq c_x$. Ist X wegzusammenhängend und ist jeder geschlossene Weg in X nullhomotop, so heißt X **einfach zusammenhängend**.

A.2.6 Definition:

Für aneinanderfügbare Wege α und β ist das **Produkt der Homotopieklassen** definiert durch $[\alpha][\beta] := [\alpha\beta]$.

A.2.7 Lemma: (vgl. [StZ 88, Lemma 5.1.6, S. 102])

- (a) Es gilt $[\alpha](\beta)[\gamma] = ([\alpha][\beta])[\gamma]$ für Wege $\alpha, \beta, \gamma : I \rightarrow X$ mit $\alpha(1) = \beta(0)$ und $\beta(1) = \gamma(0)$.

- (b) Es gilt $[c_x][\alpha] = [\alpha] = [\alpha][c_y]$ für jeden Weg α in X von x nach y .
- (c) Es gilt $[\alpha][\alpha^{-1}] = [c_x]$ und $[\alpha^{-1}][\alpha] = [c_y]$ für jeden Weg α in X von x nach y .

A.2.8 Satz und Definition: (vgl. [StZ 88, Satz und Def. 5.1.7, S. 103])
Sei (X, x_0) ein topologischer Raum mit Basispunkt x_0 . Dann ist die Menge

$$\pi_1(X, x_0) := \{[\alpha] \mid \alpha : I \rightarrow X \text{ geschlossener Weg mit Aufpunkt } x_0\}$$

eine Gruppe bzgl. der Multiplikation $[\alpha][\beta] = [\alpha\beta]$. Sie heißt die **Fundamentalgruppe von X zum Basispunkt x_0** . Ihr neutrales Element $1 = [c_{x_0}]$ ist die Homotopieklassse aller nullhomotopen geschlossenen Wege in X mit Aufpunkt x_0 . Invers zu $[\alpha]$ ist $[\alpha]^{-1} = [\alpha^{-1}]$.

A.2.9 Satz und Definition: (vgl. [StZ 88, Satz und Def. 5.1.8, S. 103])
Ist $\gamma : I \rightarrow X$ ein Weg von x_0 nach x_1 , so ist

$$\gamma_+ : \pi_1(X, x_1) \rightarrow \pi_1(X, x_0), \quad \gamma_+([\alpha]) = [\gamma][\alpha][\gamma^{-1}]$$

ein Gruppenisomorphismus. Wenn $x_0, x_1 \in X$ in der gleichen Wegzusammenhangskomponente liegen, ist folglich $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$. Wenn X wegzusammenhängend ist, gilt dies für alle $x_0, x_1 \in X$. Dann schreiben wir, wenn es auf den Basispunkt nicht ankommt, $\pi_1(X)$ statt $\pi_1(X, x_0)$.

A.2.10 Lemma: (vgl. [StZ 88, Kor. 5.1.13, S. 105])

Ist X wegzusammenhängend, so sind folgende Aussagen äquivalent:

- (a) X ist einfach zusammenhängend.
- (b) $\pi_1(X, x_0) = 1$ für ein (also für alle) $x_0 \in X$.
- (c) $\alpha \simeq \beta : I \rightarrow X$ für je zwei Wege mit gleichem Anfangs- und Endpunkt.

A.2.11 Satz und Definition: (vgl. [StZ 88, Satz 5.1.15/16, S. 105])

Sei $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ eine stetige Abbildung, so wird durch $[\alpha] \mapsto [f \circ \alpha]$ ein Homomorphismus von $\pi_1(X, x_0)$ nach $\pi_1(Y, y_0)$ definiert. Er heißt der **von f induzierte Homomorphismus der Fundamentalgruppen** und wird mit $\pi_1(f)$ oder f_* bezeichnet. Es gilt:

- (a) Ist $f = \text{id}_X$ die Identität, so ist f_* die Identität von $\pi_1(X, x_0)$.
- (b) Sind $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ und $g : (Y, y_0) \rightarrow (Z, z_0)$ stetige Abbildungen, so ist $g_*f_* = (gf)_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Z, z_0)$.
- (c) Aus $f \simeq g : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ folgt $f_* = g_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$.

A.2.12 Satz: (vgl. [StZ 88, Satz 5.1.17, S. 105])

Seien $f \simeq g : X \rightarrow Y$ homotope Abbildungen und sei $\gamma : I \rightarrow Y$ der Weg, den das Bild von $x_0 \in X$ bei einer Homotopie $H : f \simeq g$ durchläuft, also $\gamma(t) = H(t, x_0)$. Dann ist $f_* = \gamma_+ \circ g_*$

A.2.13 Satz: (vgl. [StZ 88, Satz 5.2.5, S. 109])

Für topologische Räume (X, x_0) und (Y, y_0) mit Basispunkt ist die Funktion $(\text{pr}_{1*}, \text{pr}_{2*}) : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \rightarrow \pi_1(X, x_0) \oplus \pi_1(Y, y_0)$ ein Gruppenisomorphismus. Dabei ist $\text{pr}_1 : X \times Y \rightarrow X$ bzw. $\text{pr}_2 : X \times Y \rightarrow Y$ die Projektion auf X bzw. Y .

Überlagerungen

A.2.14 Definition: (vgl. [StZ 88, Def. 6.1.1, S. 146])

Es sei X ein topologischer Raum. Eine **Überlagerung von X** besteht aus einem topologischen Raum \tilde{X} und einer stetigen Abbildung $p : \tilde{X} \rightarrow X$, so dass es zu jedem $x \in X$ eine offene Umgebung U mit folgenden Eigenschaften gibt:

- (a) Das Urbild $p^{-1}(U)$ ist die Vereinigung von offenen paarweise disjunkten Mengen $\tilde{U}_j \subset \tilde{X}$, $j \in J$, wobei $J \neq \emptyset$ eine Indexmenge ist.
- (b) Für alle $j \in J$ ist die Einschränkung $p|_{\tilde{U}_j} : \tilde{U}_j \rightarrow U$ ein Homöomorphismus.

Sind die Räume \tilde{X} und X wegzusammenhängend, so sprechen wir von einer **wegzusammenhängenden Überlagerung**. Die Abbildung p nennen wir **Überlagerungsabbildung** oder kurz **Überlagerung**. \tilde{X} heißt der **Überlagerungsraum**, X heißt **Basisraum**. Für $x \in X$ heißt $p^{-1}(x)$ die **Faser über x** . Eine Umgebung U wie oben heißt eine **bzgl. p gleichmäßig überlagerte Umgebung**. Die Mengen \tilde{U}_j heißen die **Blätter über U** .

A.2.15 Satz und Definition: (vgl. [StZ 88, Satz 6.1.2, S. 147])

Ist $p : \tilde{X} \rightarrow X$ eine Überlagerung und X zusammenhängend, so sind je zwei Fasern gleichmächtig. Ihre Mächtigkeit heißt die **Blätterzahl** der Überlagerung.

A.2.16 Satz:

Es sei $p : \tilde{X} \rightarrow X$ eine Überlagerung. Dann gilt:

- (a) Für $x \in X$ ist die Faser $p^{-1}(x)$ ein diskreter Teilraum von \tilde{X} (vgl. [StZ 88, Satz 6.1.3, S. 147]).
- (b) Wenn der zusammenhängende Teilraum $\tilde{A} \subset \tilde{X}$ über einer gleichmäßig überlagerten Umgebung U in X liegt (d. h. $p(\tilde{A}) \subset U$), so gibt es ein Blatt \tilde{U}_i über U mit $\tilde{A} \subset \tilde{U}_i$ (vgl. [StZ 88, Satz 6.1.3, S. 147]).
- (c) Ist $x \in V \subset U$, V offen, und wird U gleichmäßig überlagert, so auch V (vgl. [StZ 88, Satz 6.1.3, S. 147]).
- (d) Die gleichmäßig überlagerten Umgebungen in X bilden eine Basis für die Topologie von X , und die darüber liegenden Blätter bilden eine Basis für die Topologie von \tilde{X} (vgl. [StZ 88, Satz 6.1.3, S. 147]).
- (e) Die Überlagerungsabbildung p ist ein lokaler Homöomorphismus und eine surjektive und offene Abbildung (vgl. [StZ 88, Satz 6.1.3, S. 147]).
- (f) p ist genau dann eine einblättrige Überlagerung, wenn p ein Homöomorphismus ist (vgl. [StZ 88, Bsp. 6.1.5, S. 147]).

- (g) Ist X einfach zusammenhängend, so ist p ein Homöomorphismus (vgl. [StZ 88, Satz 6.3.5, S. 157]).
- (h) Hat p eine endliche Blätterzahl und ist $p' : X \rightarrow Y$ eine weitere Überlagerung, so ist auch die Hintereinanderschaltung $p' \circ p : \tilde{X} \rightarrow Y$ eine Überlagerung. Ist speziell p eine n -blättrige und p' eine m -blättrige Überlagerung, so ist $p' \circ p$ mn -blättrig (vgl. [Mnk 75, Ex. 6, S. 336]).
- (i) Für jede Teilmenge $A \subset X$ ist auch die Einschränkung $p|_{p^{-1}(A)} : p^{-1}(A) \rightarrow A$ eine Überlagerung (vgl. [StZ 88, Bsp. 6.1.5, S. 148]).

A.2.17 Satz und Definition: (vgl. [StZ 88, Def. 6.1.4, S. 147])

Zwei Überlagerungen $p : \tilde{X} \rightarrow X$ und $p' : \tilde{X}' \rightarrow X$ heißen **äquivalent** (im Sinne der Überlagerungstheorie), wenn es einen Homöomorphismus $h : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}'$ gibt, so dass $p' \circ h = p$. Dann bildet h jede Faser der ersten Überlagerung bijektiv auf die Faser der zweiten Überlagerung über demselben Punkt von X ab. Daher heißt h **faserreuer Homöomorphismus**. Diese Relation ist eine Äquivalenzrelation. Äquivalente Überlagerungen haben gleiche Blätterzahl.

A.2.18 Satz: (vgl. [StZ 88, Bsp. 6.1.5, S. 148])

- (a) Sind $p_i : \tilde{X}_i \rightarrow X_i$ ($i = 1, 2$) Überlagerungen, so auch das Produkt $p_1 \times p_2 : \tilde{X}_1 \times \tilde{X}_2 \rightarrow X_1 \times X_2$, $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \mapsto (p_1(\tilde{x}_1), p_2(\tilde{x}_2))$.
- (b) Ist $p : \tilde{X} \rightarrow X$ eine Überlagerung und $A \subset X$ ein Teilraum, so ist auch die eingeschränkte Abbildung $p|_{p^{-1}(A)} : p^{-1}(A) \rightarrow A$ eine Überlagerung.

Liftungen

A.2.19 Definition:

Es sei $p : \tilde{X} \rightarrow X$ eine Überlagerung und $f : Y \rightarrow X$ eine stetige Abbildung. Ist $\tilde{f} : Y \rightarrow \tilde{X}$ eine stetige Abbildung mit $f = p \circ \tilde{f}$, so heißt \tilde{f} eine **Liftung von f bzgl. p** .

A.2.20 Satz: (vgl. [StZ 88, Satz 6.2.2, S. 151])

Zu jedem Weg α in X und zu jedem Punkt \tilde{x} über dem Anfangspunkt $\alpha(0)$ von α gibt es genau eine Liftung $\tilde{\alpha}$ von α mit $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{x}$. Ferner gilt: Homotope Wege liften sich in homotope Wege, d. h. wenn $\alpha \simeq \beta$ in X , so $\tilde{\alpha} \simeq \tilde{\beta}$, wenn $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ Liftungen von α, β zum gleichen Anfangspunkt sind. Insbesondere haben die Liftungen $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ denselben Endpunkt.

A.2.21 Satz: (vgl. [StZ 88, Satz 6.2.4, S. 152])

Es sei $p : \tilde{X} \rightarrow X$ eine Überlagerung und Y ein zusammenhängender Raum. Sind $\tilde{f}, \tilde{g} : Y \rightarrow \tilde{X}$ zwei Liftungen derselben Abbildungen, d. h. $p \circ \tilde{f} = p \circ \tilde{g}$, und nehmen \tilde{f}, \tilde{g} an einem Punkt den gleichen Wert an, so gilt $\tilde{f} = \tilde{g}$.

A.2.22 Satz: (vgl. [StZ 88, Satz 6.2.6, S. 154])

Y sei wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend, $p : \tilde{X} \rightarrow X$ sei eine Überlagerung und $f : Y \rightarrow \tilde{X}$ stetig. Ferner seien $y_0 \in Y$, $x_0 \in X$ und

$\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ Punkte mit $f(y_0) = x_0$ und $p(\tilde{x}_0) = x_0$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (a) Es gibt eine stetige Abbildung $\tilde{f} : Y \rightarrow \tilde{X}$ mit $p \circ \tilde{f} = f$ und $\tilde{f}(y_0) = \tilde{x}_0$.
- (b) $f_*\pi_1(Y, y_0) \subset p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$.

A.2.23 Satz und Definition: (vgl. [StZ 88, Satz 6.3.1, S. 155])

Der von der Überlagerungsabbildung $p : \tilde{X} \rightarrow X$ induzierte Homomorphismus $p_* : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ ist injektiv. Die Bildgruppe $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \subset \pi_1(X, x_0)$ besteht aus den Homotopieklassen $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$, für die die Liftung $\tilde{\alpha}$ ein geschlossener Weg in \tilde{X} ist. $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \subset \pi_1(X, x_0)$ heißt die **charakteristische Untergruppe** der Überlagerung $p : \tilde{X} \rightarrow X$ zum Punkt \tilde{x}_0 .

A.2.24 Satz: (vgl. [StZ 88, Satz 6.3.2, S. 155])

- (a) Ist $\tilde{\alpha}$ ein Weg in \tilde{X} von \tilde{x}_0 nach \tilde{x}'_0 und $a := [p \circ \tilde{\alpha}] \in \pi_1(X, x_0)$, so ist $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = a p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}'_0) a^{-1}$. Ist also \tilde{X} wegzusammenhängend, so sind je zwei charakteristische Untergruppen in $\pi_1(X, x_0)$ konjugiert.
- (b) Ist $U \subset \pi_1(X, x_0)$ zu einer charakteristischen Untergruppe $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ konjugiert, so ist U selbst eine charakteristische Untergruppe, also $U = p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}'_0)$ für einen Punkt \tilde{x}'_0 über x_0 .

A.2.25 Definition:

Sei $p : \tilde{X} \rightarrow X$ eine wegzusammenhängende Überlagerung. Dann ist $C(\tilde{X}, p) = \{p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \mid \tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)\}$ eine Klasse konjugierter Untergruppen von $\pi_1(X, x_0)$. Sie heißt die **charakteristische Konjugationsklasse** der Überlagerung $p : \tilde{X} \rightarrow X$.

A.2.26 Satz: (vgl. [StZ 88, Satz 6.3.4, S. 156])

Zwei wegzusammenhängende Überlagerungen $p : \tilde{X} \rightarrow X$ und $p' : \tilde{X}' \rightarrow X$ des lokal wegzusammenhängenden Raumes X sind genau dann äquivalent, wenn sie das gleiche Liftungsverhalten haben, d. h. wenn die charakteristischen Konjugationsklassen $C(\tilde{X}, p)$ und $C(\tilde{X}', p')$ in $\pi_1(X, x_0)$ übereinstimmen.

A.2.27 Satz: (vgl. [StZ 88, Satz 6.3.5, S. 157])

Die Blätterzahl der wegzusammenhängenden Überlagerung $p : \tilde{X} \rightarrow X$ ist der Index der charakteristischen Untergruppe $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ in der Gruppe $\pi_1(X, x_0)$. Dieser ist natürlich unabhängig von $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$.

Universelle Überlagerung und Decktransformationen

A.2.28 Satz und Definition: (vgl. [StZ 88, Def. 6.4.1, S. 157])

Eine wegzusammenhängende Überlagerung heißt **universell**, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

- (a) \tilde{X} ist einfach zusammenhängend.
- (b) Die Konjugationsklasse $C(\tilde{X}, p)$ besteht aus der Untergruppe $\{1\} \subset \pi_1(X, x_0)$.

- (c) Ein geschlossener Weg α in X mit Anfangs- und Endpunkt x_0 liftet sich niemals in einen geschlossenen Weg in \tilde{X} , es sei denn, α ist nullhomotop.

Dabei ist $x_0 \in X$ fest. Wenn (ii) und (iii) für x_0 gelten, so auch für alle anderen $x \in X$. Wenn X wegzusammenhängend ist, sind je zwei universelle Überlagerungen von X äquivalent. Wir sprechen daher von der **universellen Überlagerung** von X ; ihre Blätterzahl ist die Ordnung der Gruppe $\pi_1(X, x_0)$.

A.2.29 Korollar:

Es sei $p : \tilde{X} \rightarrow X$ eine universelle Überlagerung. Dann besitzt jede stetige Abbildung $f : \tilde{X} \rightarrow X$ eine Liftung $\tilde{f} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$, also $f = \pi \circ \tilde{f}$.

A.2.30 Definition:

Ein Raum X heißt **semilokal einfach-zusammenhängend**, wenn zu jedem $x \in X$ eine Umgebung U von x existiert, so dass jeder geschlossene Weg in U nullhomotop in X ist. X heißt **hinreichend zusammenhängend**, wenn X wegzusammenhängend, lokal wegzusammenhängend und semilokal einfach zusammenhängend ist.

A.2.31 Satz: (vgl. [StZ 88, Satz 6.4.4, S. 158])

Jeder hinreichend zusammenhängende Raum X besitzt eine universelle Überlagerung $p : \tilde{X} \rightarrow X$.

A.2.32 Definition:

Eine **Decktransformation** einer Überlagerung $p : \tilde{X} \rightarrow X$ ist ein fasertreuer Homöomorphismus $\tilde{h} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$, d. h. $p = p \circ \tilde{h}$. Die Decktransformationen bilden bzgl. der Hintereinanderschaltung eine Gruppe, die **Decktransformationengruppe** $D(\tilde{X}, p) = D(p)$ der Überlagerung.

A.2.33 Satz: (vgl. [StZ 88, Satz 6.5.3, S. 161])

Die Decktransformationengruppe $D(\tilde{X}, p)$ operiert eigentlich diskontinuierlich und frei auf dem Überlagerungsraum \tilde{X} . Insbesondere hat eine von der Identität verschiedene Decktransformation keinen Fixpunkt, und zwei Decktransformationen, die an einem Punkt übereinstimmen, sind identisch. Äquivalente Überlagerungen haben isomorphe Decktransformationengruppen.

A.2.34 Definition: (vgl. [StZ 88, Def. 6.5.4, S. 162])

Sei G eine Gruppe und $U \subset G$ eine Untergruppe. Der **Normalisator** $\mathcal{N}_G(U)$ von U in G ist die Untergruppe von G , die aus allen Elementen $g \in G$ mit $g^{-1}Ug = U$ besteht. Ist $p : \tilde{X} \rightarrow X$ eine Überlagerung und $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ ein Punkt über $x_0 \in X$, so bezeichnen wir mit $\mathcal{N}p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ den Normalisator der Untergruppe $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ in $\pi_1(X, x_0)$.

A.2.35 Satz: (vgl. [StZ 88, Satz 6.5.5, S. 162])

Es sei $p : \tilde{X} \rightarrow X$ eine wegzusammenhängende Überlagerung. Dann ist $D(\tilde{X}, p)$ isomorph zu $\mathcal{N}U/U$, wenn $U \subset \pi_1(X, x_0)$ eine zur Klasse $C(\tilde{X}, p)$ gehörende Untergruppe ist.

A.2.36 Satz: (vgl. [StZ 88, Kor. 6.5.6, S. 163])

Sei $p : \tilde{X} \rightarrow X$ die universelle Überlagerung des wegzusammenhängenden Raumes X und $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ ein Punkt über $x_0 \in X$. Dann gibt es zu jedem $u = [\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$ genau eine Decktransformation $h_u \in D(\pi)$, die \tilde{x}_0 auf den Endpunkt der Lifting des Weges α zum Anfangspunkt \tilde{x}_0 abbildet. Die so definierte Funktion $\Pi_{x_0} : u \mapsto h_u$ ist ein Gruppenisomorphismus.

A.2.37 Satz und Definition: (vgl. [StZ 88, Def. 6.5.8, S. 163])

Eine wegzusammenhängende Überlagerung $p : \tilde{X} \rightarrow X$ heißt **normal** oder **regulär**, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

- (a) Für alle Punkte $\tilde{x}_0, \tilde{x}'_0$ über x_0 ist $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}'_0)$, d. h. die Konjugationsklasse $C(\tilde{X}, p)$ besteht aus genau einer Untergruppe von $\pi_1(X, x_0)$.
- (b) Für jeden Punkt \tilde{x}_0 über x_0 ist $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ ein Normalteiler in $\pi_1(X, x_0)$.
- (c) Wenn ein beliebiger geschlossener Weg in X mit Anfangs- und Endpunkt x_0 eine geschlossene Lifting hat, so sind alle seine Liftingen geschlossen.
- (d) Ist X lokal wegzusammenhängend: Zu je zwei Punkten $\tilde{x}_0, \tilde{x}'_0$ über x_0 gibt es eine Decktransformation \tilde{f} mit $\tilde{f}(\tilde{x}_0) = \tilde{x}'_0$.

Regulär sind insbesondere: alle universellen Überlagerungen, alle Überlagerungen von X , wenn $\pi_1(X)$ abelsch ist, alle zweiblättrigen Überlagerungen.

A.3 Simplizialkomplexe

A.3.1 Definition: (vgl. [StZ 88, Def. 3.1.1, S. 70])

Seien $x_0, \dots, x_q \in \mathbb{R}^n$ Punkte in allgemeiner Lage. Die Punktmenge

$$\sigma = \sigma_n = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid x = \sum_{i=0}^q \lambda_i x_i \text{ mit } \sum_{i=0}^q \lambda_i = 1, \lambda_i > 0 \right\}$$

heißt das (**offene**) **Simplex** mit den Ecken x_0, \dots, x_q oder das von x_0, \dots, x_q aufgespannte Simplex. Wir schreiben $\sigma = (x_0, \dots, x_q)$. Die Zahl q heißt die **Dimension** von σ , Bezeichnung: $q = \dim \sigma$, und σ heißt ein **q -dimensionales Simplex** oder **q -Simplex**.

A.3.2 Definition: (vgl. [StZ 88, Def. 3.1.4, S. 72])

Es seien $\sigma, \tau \subset \mathbb{R}^n$ Simplexe. τ heißt **Seite** von σ , Bezeichnung: $\tau \leq \sigma$, wenn die Ecken von τ auch Ecken von σ sind. Wenn $\tau \leq \sigma$ und $\tau \neq \sigma$ gilt, heißt τ **eigentliche Seite** von σ ; wir schreiben: $\tau < \sigma$.

A.3.3 Definition: (vgl. [StZ 88, Def. 3.1.6, S. 72])

Ein **Simplizialkomplex** K ist eine endliche Menge von Simplexen im \mathbb{R}^n mit folgenden Eigenschaften:

- (1) Aus $\sigma \in K$ und $\tau < \sigma$ folgt $\tau \in K$.
- (2) Aus $\sigma, \tau \in K$ und $\sigma \neq \tau$ folgt $\sigma \cap \tau = \emptyset$.

Die 0- bzw. 1-Simplexe von K heißen **Ecken** bzw. **Kanten** von K . Die Zahl $\dim K = \max_{\sigma \in K} \dim \sigma$ heißt die **Dimension** von K .

A.3.4 Definition: (vgl. [StZ 88, Def. 3.1.7, S. 72])

Sei K ein Simplizialkomplex. Die Teilmenge $|K| = \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$, zusammen mit der Teilraumtopologie des \mathbb{R}^n , heißt der dem **Simplizialkomplex zugrunde liegende topologische Raum**. Ein topologischer Raum X heißt ein **triangularisierbarer Raum** oder ein **Polyeder**, wenn es einen Simplizialkomplex K gibt, so dass $|K|$ homöomorph ist zu X .

A.3.5 Korollar: (vgl. [StZ 88, Bem. 3.1.8, S. 73])

Jedes Polyeder ist homöomorph zu einer kompakten Teilmenge des \mathbb{R}^n , also ein kompakter metrisierbarer Raum.

A.3.6 Definition: (vgl. [StZ 88, Def. 3.1.10, S. 74])

Zu jedem Punkt $x \in |K|$ gibt es nach Definition A.3.3 (2) ein Simplex $\sigma \in K$ mit $x \in \sigma$. Dieses Simplex heißt das **Trägersimplex** von x in K und wird mit $\text{Tr}_K(x)$ bezeichnet.

A.3.7 Definition: (vgl. [StZ 88, Def. 3.1.16, S. 75])

Eine Funktion $\varphi : K \rightarrow L$ zwischen Simplizialkomplexen heißt **simpliziale Abbildung**, wenn gilt:

- (1) φ bildet Ecken von K in Ecken von L ab.
- (2) Sind $x_0, \dots, x_q \in K$ die Ecken von $\sigma \in K$, so ist $\varphi(\sigma) \in L$ das Simplex, das von den verschiedenen der Ecken $\varphi(x_0), \dots, \varphi(x_q) \in L$ aufgespannt wird.

A.3.8 Satz und Definition: (vgl. [StZ 88, Satz und Def. 3.1.18, S. 75])

Eine simpliziale Abbildung $\varphi : K \rightarrow L$ induziert eine stetige Abbildung $|\varphi| : |K| \rightarrow |L|$ durch

$$|\varphi| \left(\sum \lambda_i x_i \right) = \sum \lambda_i \varphi(x_i).$$

A.3.9 Definition: (vgl. [StZ 88, Def. 3.2.1, S. 78]))

Der Schwerpunkt $\hat{\sigma}$ des q -Simplexes σ ist der Punkt mit den baryzentrischen Koordinaten $\lambda_0 = \dots = \lambda_q = \frac{1}{q+1}$, d. h. $\hat{\sigma} = \frac{1}{q+1} \sum_{i=0}^q x_i$, wenn das Simplex σ von den Punkten x_0, \dots, x_q aufgespannt wird.

A.3.10 Satz und Definition: (vgl. [StZ 88, Satz und Def. 3.2.2, S. 78])

Zu jedem Simplizialkomplex K gibt es einen Simplizialkomplex K' , die sog. **Normalunterteilung** von K , mit den folgenden Eigenschaften:

- (1) Die Ecken von K' sind die Schwerpunkte $\hat{\sigma}$ der Simplexe $\sigma \in K$.
- (2) Die Ecken $\hat{\sigma}^0, \dots, \hat{\sigma}^q$ von K' spannen genau dann ein zu K' gehörendes q -Simplex auf, wenn für die zugehörigen Simplexe $\sigma^0, \dots, \sigma^q \in K$ bei geeigneter Nummerierung $\sigma^0 < \sigma^1 < \dots < \sigma^q$ gilt.
- (3) Es ist $|K'| = |K|$; ferner haben K' und K die gleiche Dimension m .

(4) Für jedes Simplex $\sigma' \in K'$ ist $d(\sigma') \leq \frac{m}{m+1} \max_{\sigma \in K} \text{diam}(\sigma)$.

A.3.11 Satz und Definition: (vgl. [StZ 88, Satz und Def. 3.2.3, S. 81])
 Zu jedem Simplizialkomplex K und jeder Zahl $\varepsilon > 0$ gibt es eine natürliche Zahl q , so dass alle Simplexe der q -ten Normalunterteilung $K^{(q)}$ von K einen Durchmesser $< \varepsilon$ haben; dabei ist $K^{(q)}$ induktiv durch $K^{(1)} = L'$ und $K^{(q)} = (K^{(q-1)})'$ für $q > 1$ definiert.

A.3.12 Definition: (vgl. [StZ 88, Def. 3.2.4, S. 81])

Gegeben seien Simplizialkomplexe K und L und eine stetige Abbildung $f : |K| \rightarrow |L|$. Eine simpliziale Abbildung $\varphi : K \rightarrow L$ heißt **simpliziale Approximation** von f , wenn für alle $x \in |K|$ der Punkt $|\varphi|(x) \in |L|$ im abgeschlossenen Trägersimplex von $f(x)$ liegt, also $|\varphi|(x) \in \text{cl}(\text{Tr}_L f(x))$.

A.3.13 Satz: (vgl. [StZ 88, Satz 3.2.5, S. 81])

Ist $\varphi : K \rightarrow L$ eine simpliziale Approximation von $f : |K| \rightarrow |L|$, so ist $|\varphi| \simeq f : |K| \rightarrow |L|$.

A.3.14 Satz: (vgl. [StZ 88, Satz 3.2.7, S. 81])

Zu jeder stetigen Abbildung $f : |K| \rightarrow |L|$ und zu jeder hinreichend großen Zahl q gibt es eine simpliziale Approximation $\varphi : K^{(q)} \rightarrow L$ von f .

A.3.15 Definition: (vgl. [StZ 88, Def. 3.2.8, S. 81])

Für eine Ecke $p \in K$ heißt $\text{St}_K(p) = \{x \in |K| \mid p \leq \text{Tr}_K(x)\}$ der **Eckenstern** von p in K . Er ist eine Teilmenge von $|K|$.

A.3.16 Satz: (vgl. [StZ 88, Hilfssatz 3.2.9, S. 82])

- (a) Die Eckensterne von K bilden eine offene Überdeckung von $|K|$.
- (b) Ist \mathcal{U} eine offene Überdeckung von $|K|$, so ist die Überdeckung von $|K|$ durch die Eckensterne von $K^{(q)}$ für alle hinreichend großen q feiner als \mathcal{U} (d. h. jeder Eckenstern von $K^{(q)}$ ist in einem $U \in \mathcal{U}$ enthalten).

A.4 Längenräume

A.4.1 Definition:

Seien (X, d) und (\tilde{X}, \tilde{d}) metrische Räume. Eine bijektive Abbildung $f : X \rightarrow \tilde{X}$ heißt **Isometrie**, falls $\tilde{d}(f(x), f(y)) = d(x, y)$ für alle $x, y \in X$ gilt. f ist eine **lokale Isometrie**, wenn für jedes $x \in X$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass die Einschränkung $f|_{B(x, \varepsilon)}$ eine Isometrie ist (und folglich nach $B(f(x), \varepsilon)$ abbildet).

A.4.2 Definition:

Es sei (X, d) ein metrischer Raum, $c : [a, b] \rightarrow X$ ein Weg und $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ eine Partition von $[a, b]$. Dann definieren wir

$$L(c, t_0, \dots, t_n) := \sum_{i=1}^n d(c(t_{i-1}), c(t_i)).$$

Die **Länge** $L(c)$ von c ist definiert durch

$$L(c) := \sup \{L(c, t_0, \dots, t_n) \mid a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b \text{ Partition von } [a, b]\}.$$

1 Sie ist eine nichtnegative reelle Zahl oder ∞ . Gilt $L(c) < \infty$, so heißt c **rektifizierbar**. Ein Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ heißt **natürlich parametrisiert**, falls $L(\gamma|_{[t, t']}) = |t - t'|$ für alle $t, t' \in [a, b]$.

A.4.3 Satz: (vgl. [Bur 01, Prop. 2.3.4, S. 34])

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann gilt:

- (a) $L(\gamma) \geq d(\gamma(a), \gamma(b))$ für alle Wege $\gamma : [a, b] \rightarrow X$.
- (b) Für $a < c < b$ gilt $L(\gamma|_{[a, c]}) + L(\gamma|_{[c, b]}) = L(\gamma)$.
- (c) Ist γ rektifizierbar, so ist $(t, s) \mapsto L(\gamma|_{[t, s]})$ stetig in t und s .

A.4.4 Definition:

Ein metrischer Raum (X, d) heißt **Längenraum**, falls für alle $x, y \in X$ gilt:

$$d(x, y) = \inf \{L(c) \mid c : I \rightarrow X \text{ rektifizierbarer Weg von } x \text{ nach } y\}.$$

A.4.5 Satz: (vgl. [Bur 01, Prop. 2.5.9, S. 46])

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ ein rektifizierbarer Weg. Dann kann γ in der Form $\gamma = \bar{\gamma} \circ \varphi$ dargestellt werden, wobei $\bar{\gamma} : [0, L(\gamma)] \rightarrow X$ natürlich parametrisiert ist und φ eine monoton wachsende Abbildung von $[a, b]$ nach $[0, L(\gamma)]$ ist.

A.4.6 Definition:

Sei (X, d) ein Längenraum und seien $x, y \in X$. Ein Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ von x nach y heißt ein **kürzester Weg**, wenn $L(\gamma) \leq L(\gamma')$ für alle Wege γ' von x nach y . X heißt **geodätischer Längenraum**, wenn es zu je zwei Punkten $x, y \in X$ einen kürzesten Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ von x nach y gibt.

A.4.7 Definition:

Sei (X, d) ein Längenraum. Ein Weg $\gamma : (a, b) \rightarrow X$ heißt **Geodäte**, wenn für jedes $t \in I$ ein Intervall J existiert, das eine Umgebung von t enthält, so dass $\gamma|_J$ ein kürzester Weg ist.

A.4.8 Satz: (vgl. [Bur 01, Theorem 2.5.28, S. 51])

Sei (X, d) ein vollständiger und lokal kompakter Längenraum. Dann gilt:

- (a) Jede abgeschlossene beschränkte Teilmenge von X ist kompakt.
- (b) X ist ein geodätischer Längenraum.

Insbesondere ist also jeder kompakte Längenraum geodätisch.

A.5 Mannigfaltigkeiten und Orbifaltigkeiten

A.5.1 Definition:

Es sei M ein Hausdorffraum, der das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. Ferner existiere zu jedem Punkt $x \in M$ eine offene Umgebung U_x , die homöomorph

zu einer offenen Teilmenge des \mathbb{R}^n , $n \in \mathbb{N}$, ist. Dann nennt man M eine **topologische Mannigfaltigkeit**. Jedes Paar (U, h) aus einer solchen Umgebung U und einem Homöomorphismus $h : U \rightarrow V$ heißt **Karte**. Eine Menge $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, h_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ heißt **Atlas**, falls $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ eine Überdeckung von M ist. Ist n ($= \dim \mathbb{R}^n$) für alle $x \in X$ konstant, so heißt n die **Dimension von M** .

A.5.2 Satz: (vgl. [Mnk 75, Ex. 1, S. 224])

Eine topologische Mannigfaltigkeit M ist lokal kompakt, lokal wegzusammenhängend, semilokal einfach zusammenhängend und metrisierbar.

A.5.3 Definition:

Eine hausdorffsche topologische Gruppe Γ operiert auf einem lokal kompakten Hausdorffraum X **eigentlich diskontinuierlich**, falls für jede kompakte Menge $K \subset X$ nur endlich viele $\gamma \in \Gamma$ existieren mit $\gamma K \cap K \neq \emptyset$.

A.5.4 Definition:

Eine **Orbifaltigkeit** besteht aus einem Hausdorffraum X und einer offenen Überdeckung $\{U_i\}_{i \in I}$ von X , die abgeschlossen ist unter endlichen Schnitten. Zu jeder Menge U_i gehört eine endliche Gruppe Γ_i , eine Wirkung von Γ_i auf einer offenen Menge $\tilde{U}_i \subset \mathbb{R}^n$ und ein Homöomorphismus $\varphi_i : U_i \cong \tilde{U}_i / \Gamma_i$. Wann immer $U_i \subset U_j$ gilt, muss ein injektiver Homomorphismus $f_{ij} : \Gamma_i \rightarrow \Gamma_j$ existieren und eine Einbettung $\tilde{\varphi}_{ij} : \tilde{U}_i \rightarrow \tilde{U}_j$, äquivariant bzgl. f_{ij} , d. h. $\tilde{\varphi}_{ij}(\gamma x) = f_{ij}(\gamma) \tilde{\varphi}_{ij}(x)$ für alle $\gamma \in \Gamma_i$, so dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{U}_i & \xrightarrow{\tilde{\varphi}_{ij}} & \tilde{U}_j \\
 \downarrow & \varphi_{ij} = \tilde{\varphi}_{ij} / \Gamma_i & \downarrow \\
 \tilde{U}_i / \Gamma_i & \xrightarrow{\quad} & \tilde{U}_j / \Gamma_j \\
 \uparrow \varphi_i & & \downarrow f_{ij} \\
 U_i & \xrightarrow{\quad \subset \quad} & U_j \\
 \end{array}$$

A.5.5 Satz: (vgl. [Thr 02, Prop. 13.2.1, S. 302])

Sei M eine topologische Mannigfaltigkeit und Γ eine Gruppe, die auf M eigentlich diskontinuierlich operiert. Dann besitzt M/Γ eine kanonische Orbifaltigkeitsstruktur.

A.5.6 Definition:

Sei O eine Orbifaltigkeit mit zugrunde liegendem Raum X . Dann wird jedem Punkt $x \in X$ eine Gruppe Γ_x zugeordnet, die wohldefiniert bis auf Isomorphismen ist. In einem lokalen Koordinatensystem $U = \tilde{U} / \Gamma$ ist Γ_x die Isotropiegruppe jedes Punktes in \tilde{U} , der auf x abgebildet wird. Die Menge $\Sigma_O = \{x \in X \mid \Gamma_x \neq \{1\}\}$ heißt **singuläre Menge** von O .

A.5.7 Definition:

Eine **Orbifaltigkeitsüberlagerung** zwischen Orbifaltigkeiten O und O' ist

eine Abbildung $p : X \rightarrow X'$ der zugrunde liegenden Räume, so dass jeder Punkt $x \in X'$ eine Umgebung $U = \tilde{U}/\Gamma$ (\tilde{U} offen in \mathbb{R}^n) hat, so dass jede Komponente V_i von $p^{-1}(U)$ isomorph zu \tilde{U}/Γ_i ist, wobei $\Gamma_i \subset \Gamma$ irgendeine Untergruppe ist. Der Isomorphismus muss die Projektionen respektieren.

A.5.8 Satz: (vgl. [Thr 02, Prop. 13.2.4, S. 305])

Eine Orbifaltigkeit O hat eine universelle Überlagerung \tilde{O} . Mit anderen Worten: Ist $x \in X_O \setminus \Sigma_O$ ein Basispunkt, so ist \tilde{O} , $p : X_{\tilde{O}} \rightarrow X_O$, eine zusammenhängende Orbifaltigkeitsüberlagerung mit Basispunkt \tilde{x} , der auf x abgebildet wird, so dass für jede andere Orbifaltigkeitsüberlagerung \tilde{O}' , $p' : X_{\tilde{O}'} \rightarrow X_O$ mit Basispunkt \tilde{x}' , $p'(\tilde{x}') = x$, eine Liftung $q : X_{\tilde{O}} \rightarrow X_{\tilde{O}'}$ zu einer Überlagerungsabbildung von \tilde{O}' existiert. Insbesondere gilt also $p = p' \circ q$.

A.6 Dynamik linearer Abbildungen

A.6.1 Definition:

Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf \mathbb{R}^n . Dann definiert man auf $\mathbb{R}^{n \times n}$ die von $\|\cdot\|$ induzierte **Operatornorm**

$$\|A\| := \sup_{v \neq 0} \frac{\|Av\|}{\|v\|}.$$

Ferner definiert man den **Spektralradius** $r(A)$ einer Matrix A als das Maximum der Beträge der Eigenwerte von A .

A.6.2 Satz:

Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf \mathbb{R}^n . Dann gilt für $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $v \in \mathbb{R}^n$:

- (a) $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.
- (b) $\|Av\| \leq \|A\|\|v\|$.
- (c) $\|A\| \geq r(A)$.

A.6.3 Satz:

(vgl. [Kat 95, S. 20])
Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann existiert für jedes $\delta > 0$ eine Norm $\|\cdot\|$ auf \mathbb{R}^n mit $\|A\| < r(A) + \delta$. Für eine beliebige Norm $\|\cdot\|$ und jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $C_\varepsilon > 0$ mit:

$$\|A^k v\| \leq C_\varepsilon (r(A) + \varepsilon)^k \|v\| \quad \text{für alle } v \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{N}.$$

Literaturverzeichnis

- [Adl 97] Adler, R., Tresser, C., Worfolk, P. A.: *Topological conjugacy of linear endomorphisms of the 2-Torus*, Transactions of the American Mathematical Society, Volume 349, No. 4, 1633-1652 (1997).
- [Ars 46] Arens, R. F.: *Topologies for homeomorphism groups*, American Journal of Mathematics 68, 593-610 (1946).
- [Aul 04] Aulbach, B. and Kieninger, B.: *An elementary proof for hyperbolicity and chaos of the logistic maps*, Journal of Difference Equations and Applications 10, No. 13-15, 1243-1250 (2004).
- [Bdw 90] Baldwin, S.: *A complete classification of the piecewise monotone functions on the interval*, Transactions of the American Mathematical Society, Volume 319, No. 1, 155-178 (1990).
- [Bur 01] Burago, B., Burago, Y., Ivanov, S.: *A Course in Metric Geometry*, Graduate Studies in Mathematics, Providence, Rhode Island: American Mathematical Society (2001).
- [Dck 91] tom Dieck, T.: *Topologie*, Berlin-New-York: de Gruyter (1991).
- [Dgy 66] Dugundji, J.: *Topology*, Boston: Allyn and Bacon Series in Advanced Mathematics (1966).
- [Dnk 05] Denker, M.: *Einführung in die Analysis dynamischer Systeme*, Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag (2005).
- [Fot 01] Fotiades, N. A., Boudourides, M. A.: *Topological conjugacies of piecewise monotone interval maps*, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences 25:2, 119-127 (2001).
- [Gln 01] Glendinning, P.: *Hyperbolicity of the invariant set for the logistic map with $\mu > 4$* , Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications 47, 3323-3332 (2001).
- [Grm 81] Gromov, M.: *Groups of polynomial growth and expanding maps*, Institut des Hautes Etudes Scientifiques Publications Mathématiques 53, 53-78 (1981).
- [Hat 02] Hatcher, A.: *Algebraic Topology*, Cambridge University Press (2002).

- [Kat 95] Katok, A., Hasselblatt, B.: *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications 54. Cambridge: Cambridge Univ. Press (1995).
- [Kow 03] Kowalsky, H., Michler, G. O.: *Lineare Algebra*, Berlin: de Gruyter, 12. Auflage (2003).
- [Kra 99] Kraft, R. L.: *Chaos, Cantor sets, and hyperbolicity for the logistic maps*, American Mathematical Monthly 106, 400-408 (1999).
- [Las 94] Lasota, A., Mackey, M. C.: *Chaos, Fractals, and Noise*, Applied Mathematical Sciences 97, New York: Springer-Verlag (1994).
- [Lng 87] Lang, S.: *Elliptic Functions*, Second Edition, Graduate Texts in Mathematics, New York: Springer-Verlag (1987).
- [Mat 68] Mather, J. N.: *Characterisation of Anosov diffeomorphisms*, Indag. Math. 30, 479-483 (1968). Studies, Princeton University Press (1994).
- [Mel 92] de Melo, W., van Strien, S.: *One-Dimensional Dynamics*, Berlin: Springer-Verlag (1992).
- [Mnk 75] Munkres, J. R.: *Topology. A first course*, Englewood Cliffs: Prentice Hall (1975).
- [Oss 92] Ossa, E.: *Topologie*, Braunschweig: Vieweg (1992).
- [Rob 95] Robinson, C.: *Dynamical Systems. Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos*, Boca Raton: CRC Press (1995).
- [Shb 69] Shub, M.: *Endomorphisms of compact differentiable manifolds*, American Journal of Mathematics, 175-199 (1969).
- [StZ 88] Stöcker, R., Zieschang, H.: *Algebraische Topologie*, Stuttgart: Teubner Verlag (1988).
- [Thr 02] Thurston, W.: *The Geometry and Topology of Three-Manifolds*, Electronic Version 1.1, <http://www.msri.org/publications/books/gt3m> (2002).
- [Urb 02] Urbanski, M., Przytycki, F.: *Fractals in the plane — the Ergodic Theory Methods*, Cambridge University Press (2002).
- [Zel 01] Zeller, S. and Thaler, M.: *Almost sure escape from the unit interval under the logistic map*, American Mathematical Monthly 108, 155-158 (2001).

Notation

\emptyset	leere Menge
$x \in A$	x Element von A
$x \notin A$	x kein Element von A
$\{x \in X \mid E(x)\}$	Menge aller $x \in X$ mit der Eigenschaft $E(x)$
$A \subset B$	A Teilmenge von B
$B \supset A$	B Obermenge von A
$A \times B$	kartesisches Produkt von A und B , $\{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$
A^n	n -faches kartesisches Produkt von A mit sich selbst
$A \cup B$	A vereinigt B
$\bigcup_{j \in J} A_j$	Vereinigung aller A_j , $j \in J$
$A \cap B$	A geschnitten B
$\bigcap_{j \in J} A_j$	Durchschnitt aller A_j , $j \in J$
$A \setminus B$	A ohne B
$\#A$	Mächtigkeit von A
$f : X \rightarrow Y$	f Abbildung von X nach Y
$f : (X, x) \rightarrow (Y, y)$	f Abbildung von X nach Y mit $f(x) = y$
$f(x) \equiv g(x)$	$f(x) = g(x)$ für alle $x \in X$ ($f, g : X \rightarrow Y$)
$f \circ g$	Komposition von f und g , $(f \circ g)(x) \equiv f(g(x))$
$f _A$	Einschränkung von f auf die Menge A
$f(A)$	Bild von A unter f , $\{y \in Y \mid \exists x \in A : f(x) = y\}$
$f^{-1}(B)$	Urbild von B unter f , $\{x \in X \mid f(x) \in B\}$
f^n	n -te Iterierte von f , $f^n = f \circ f^{n-1}$, $f^0 = \text{id}$
$f^{-n}(B)$	Urbild von B unter f^n
\mathbb{N}	Natürliche Zahlen, $\{1, 2, 3, \dots\}$
\mathbb{N}_0	$\mathbb{N} \cup \{0\}$
\mathbb{Z}	Ganze Zahlen, $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
\mathbb{R}	Reelle Zahlen
\mathbb{R}_0^+	Nichtnegative reelle Zahlen, $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$
\mathbb{C}	Komplexe Zahlen
\mathbb{R}	$\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$
$\overline{\mathbb{C}}$	Riemannsche Zahlenkugel, $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$
I	kompaktes Intervall, meist $[0, 1]$ oder $[-1, 1]$
\mathbb{R}^n	n -dimensionaler euklidischer Raum
S^n	n -dimensionale Einheitssphäre, $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \ x\ = 1\}$

T^n	n -dimensionaler Torus, $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \cong S^1 \times \cdots \times S^1$
$\mathbb{K}^{n \times n}$	$n \times n$ -Matrizen mit Einträgen in \mathbb{K}
$\mathrm{Gl}(n, \mathbb{K})$	Allgemeine lineare Gruppe von \mathbb{K}^n
$\mathrm{cl}(A)$	Topologischer Abschluss von A
$\mathrm{int}(A)$	Inneres von A
$\mathrm{bd}(A)$	Rand von A
X/\sim	Quotientenraum nach der Äquivalenzrelation \sim
X/G	Orbitraum unter der Gruppenoperation $G \times X \rightarrow X$, $(g, x) \mapsto gx$
pr	Projektion auf den Quotientenraum, $x \mapsto [x]$
pr_Γ	Projektion auf den Orbitraum unter der Wirkung von Γ
(X, x_0)	Raum mit Basispunkt
$\pi_1(X, x_0)$	Fundamentalgruppe von (X, x_0)
(X, d)	Metrischer Raum
$B(x, \varepsilon)$	ε -Ball um x , $\{y \in X \mid d(y, x) < \varepsilon\}$
$\mathrm{diam} A$	Durchmesser von A , $\sup_{x, y \in A} d(x, y)$
$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$	Folge, Abbildung von \mathbb{N} in einen topologischen Raum X
$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$	Grenzwert der konvergenten Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$
$d \text{-} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$	Grenzwert der bzgl. der Metrik d konvergenten Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$
$\mathrm{sgn}(x)$	Vorzeichen (Signum) der reellen Zahl x
$\mathrm{Re} z$	Realteil von z
$\mathrm{Im} z$	Imaginärteil von z
\bar{z}	die zu $z \in \mathbb{C}$ komplex konjugierte Zahl
$ z $	Betrag der komplexen Zahl z
$ K $	der dem Simplizialkomplex K zugrunde liegende Raum
$\mathrm{Tr}_K(x)$	das Trägersimplex von x in K
$\mathrm{St}_K(p)$	der Eckenstern von p in K
$O_f^+(x)$	Vorwärtsorbit von x unter f
$O_f^-(x)$	Rückwärtsorbit von x unter f
$\mathrm{Fix}(f)$	Fixpunktmenge von f
$\mathrm{Per}_n(f)$	n -periodische Punkte von f
$\mathrm{Per}(f)$	Periodische Punkte von f
$\omega(x, f)$	ω -Grenzmenge von x unter f
$\Omega(f)$	Menge der nichtwandernden Punkte von f
Φ_{fg}	Pullback-Operator von f nach g , $h \circ f \equiv h \circ \Phi_{fg}(h)$
id_X	Identität auf X
Y^X	Abbildungen von X nach Y
$\mathcal{C}(X, Y)$	Menge der stetigen Abbildungen von X nach Y
$\mathcal{H}(X, Y)$	Menge der Homöomorphismen von X nach Y
$\mathcal{C}(X)$	Menge der stetigen Selbstabbildungen von X , $\mathcal{C}(X, X)$
$\mathcal{C}(X, x_0, x_1)$	$\{f \in \mathcal{C}(X) \mid f(x_0) = x_1\}$
$\mathcal{H}(X)$	Homöomorphismengruppe von X , $\mathcal{H}(X, X)$

$\mathcal{H}(X, x_0, x_1)$	$\{h \in \mathcal{H}(X) \mid h(x_0) = x_1\}$
$\mathcal{H}^+(I)$	$\{h \in \mathcal{H}(I) \mid h \text{ monoton wachsend}\}$
$\mathcal{H}^-(I)$	$\{h \in \mathcal{H}(I) \mid h \text{ monoton fallend}\}$
f_*	von $f : (X, x) \rightarrow (Y, y)$ auf $\pi_1(X, x)$ ind. Homomorphismus
$[A, B]$	$\{f \in Y^X \mid f(A) \subset B\}$
$\mathcal{T}_{CO}(\mathcal{F})$	kompakt-offene Topologie auf $\mathcal{F} \subset Y^X$
$\Delta(f, g)$	Abstand in der Supremumsmetrik, $\sup_{x \in X} d(f(x), g(x))$
$\Delta^\pm(h, k)$	$\Delta(h, k) + \Delta(h^{-1}, k^{-1})$
$f \simeq g$	f homotop zu g
$D(\pi)$	Decktransformationsgruppe von $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$, $\{\gamma \in \mathcal{H}(\tilde{X}) \mid \pi = \pi \circ \gamma\}$
$\Gamma_{\tilde{x}}$	Isotropiegruppe von \tilde{x} , $\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(\tilde{x}) = \tilde{x}\}$
Σ_π	Menge der singulären Werte von $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$
$\text{Hom}(G, H)$	Menge der Homomorphismen von G nach H
$\text{Iso}(G, H)$	Menge der Isomorphismen von G nach H
$\text{End}(G)$	Menge der Endomorphismen von G
$\text{Aut}(G)$	Menge der Automorphismen von G
$T_x M$	Tangentialraum an die Mannigfaltigkeit M im Punkt x
Df_x	Differential der Abbildung f im Punkt x
$L(c)$	Länge der Kurve c
$\ f\ $	Operatornorm der linearen Abbildung f
$\ f\ ^*$	Konorm der linearen Abbildung f
$\det A$	Determinante der Matrix A
$\text{tr } A$	Spur der Matrix A
$L^1(X)$	Raum der integrierbaren Funktionen $f : X \rightarrow \mathbb{R}$
P_f	der zu f gehörige Frobenius-Perron-Operator
\wp	Weierstraß'sche \wp -Funktion, $z \mapsto \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \neq 0} \left[\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right]$
$\deg(f)$	der Grad einer rationalen Funktion f
$J(f)$	Juliamenge der rationalen Funktion f
$P(f)$	postkritische Menge der rationalen Funktion f

Index

- Alexandrov-Raum, 50
- Bernoulli-Shift, 83
- Beschattungseigenschaft, 45
- Beschattungslemma, 46
- Chaos, 13, 83
- Closing-Lemma, 46
- Dekomposition
 - spektrale, 47
- Expansionsfaktor, 39
- Expansionskonstante, 39
- Fatou-Menge, 103
- Frobenius-Perron-Operator, 87
- Fundamentalbereich, 25, 101
- Hausdorff-Dimension, 51
- Julia-Menge, 42, 103
- Kompakt-offene Topologie, 17
- Liegruppe, 54
- Logistische Abbildung, 13, 15, 91
- Mannigfaltigkeit
 - differenzierbare, 19
 - mit Rand, 32
 - Riemannsche, 41, 51, 79, 86
 - topologische, 30, 50
- Menge
 - hyperbolische, 79
 - invariante, 9
 - nichtwandernde, 11
- Metrik
 - linksinvariante, 54
 - Riemannsche, 42
- Nilmannigfaltigkeit, 54
- Orbifaltigkeit, 32
- Orbit
 - periodischer, 9
 - Pseudo-, 45
- Punkt
 - periodischer, 9
- Riemannsche Zahlenkugel, 37, 101
- Smith-Normalform, 103
- Torus
 - n -dimensionaler, 97, 101
 - zweidimensionaler, 84
- Torusendomorphismus, 53, 97
- Tschebyscheff-Polynom, 101
- Weierstraß'sche \wp -Funktion, 102
- Zeltabbildung, 13, 15, 91